LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 1

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Aufgabe 1

Kreuzen Sie jeweils "Ja" an, wenn die Aussage stimmt oder "Nein", wenn sie nicht stimmt!

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	☐ Ja ☐ Nein
$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	☐ Ja ☐ Nein
$\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 + y^2 = 0\} \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y = 0\}$	☐ Ja ☐ Nein
$\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y = 0\} \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \cdot y = 0\}$	☐ Ja ☐ Nein
$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist durch 6 teilbar}\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist gerade}\}$	☐ Ja ☐ Nein
$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist gerade}\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist durch 3 teilbar}\}$	☐ Ja ☐ Nein
Die Menge $\mathrm{Pot}(\{1, \{2,3\}, 3\})$ hat 16 Elemente.	☐ Ja ☐ Nein
Die Menge $\mathrm{Pot}(\{1, \{2,3\}, 3\})$ hat 8 Elemente.	☐ Ja ☐ Nein
Die Menge $\{(x,y) \in \{1,2,3\} \times \{2,3\} \mid x \cdot y \text{ ist gerade}\}$ hat genau 3 Elemente.	☐ Ja ☐ Nein
Die Menge $\{(x,y) \in \{1,2,3\} \times \{2,3\} \mid x \cdot y \text{ ist ungerade}\}$ hat genau 2 Elemente.	☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 2

Es seien A, B und C beliebige Mengen. Kreuzen Sie jeweils "Ja" an, wenn die Aussage stimmt oder "Nein", wenn sie nicht stimmt!

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	☐ Ja ☐ Nein
$(A \cap B) \cup C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	☐ Ja ☐ Nein
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$	☐ Ja ☐ Nein
$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$	☐ Ja ☐ Nein
$(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$	☐ Ja ☐ Nein
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	☐ Ja ☐ Nein
$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.	☐ Ja ☐ Nein
$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.	☐ Ja ☐ Nein

Ist $A \subseteq B$, dann ist $C \cap A \subseteq C \cap B$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $A \subseteq B$, dann ist $C \cup A \subseteq C \cup B$.	☐ Ja ☐ Nein
Wenn $A \cap B \subseteq C$ gilt, dann gilt sowohl $A \subseteq C$ als auch $B \subseteq C$.	☐ Ja ☐ Nein
Wenn $A \cup B \subseteq C$ gilt, dann gilt sowohl $A \subseteq C$ als auch $B \subseteq C$.	☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 3

Geben Sie jeweils die Anzahl der Abbildungen mit den beschriebenen Eigenschaften an.

Anzahl der bijektiven Abbildungen von $\{1,2,3\}$ nach $\{1,2,3\}$.	
Anzahl der bijektiven Abbildungen von $\{3,2,1\}$ nach $\{6,5,4\}$.	
Anzahl der injektiven Abbildungen von $\emptyset$ nach $\{1,2,3\}$.	
Anzahl der injektiven Abbildungen von $\{1,\{2,3\},3\}$ nach $\{-1,-2,-3\}$.	
Anzahl der injektiven Abbildungen von $\{\emptyset\}$ nach $\{1,2,3\}$.	
Anzahl der injektiven Abbildungen von $\{1,2,3\}$ nach $\{4,5\}$.	
Anzahl der surjektiven Abbildungen von $\{-3,-2,-1\}$ nach $\{1,\{2,3\},3\}$.	
Anzahl der surjektiven Abbildungen von $\{1,2,3\}$ nach $\emptyset$.	
Anzahl der surjektiven Abbildungen von $\{1,2,3\}$ nach $\{\emptyset\}$.	
Anzahl der surjektiven Abbildungen von $\{1,2\}$ nach $\{3,4,5\}$.	

Aufgabe 4

Kreuzen Sie jeweils "Ja" an, wenn die Aussage stimmt oder "Nein", wenn sie nicht stimmt!

$F : \{\{x,y\} \mid x,y \in \mathbb{Z}, x \neq y\} \to \mathbb{Z}, \{x,y\} \mapsto x^2 - y$ ist eine surjektive Abbildung.	☐ Ja ☐ Nein
$F : \{\{x,y\} \mid x,y \in \mathbb{Z}, x \neq y\} \to \mathbb{Z}, \{x,y\} \mapsto x^2 + y$ ist eine surjektive Abbildung.	☐ Ja ☐ Nein
$f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, (x,y) \mapsto (x^2 + y^2, x - y)$ ist eine injektive Abbildung.	☐ Ja ☐ Nein
$f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, (x,y) \mapsto (x^2, x - y)$ ist eine injektive Abbildung.	☐ Ja ☐ Nein

$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, x \mapsto (x, x+1)$ ist eine surjektive Abbildung.	☐ Ja ☐ Nein
$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, x \mapsto (x, x-1)$ ist eine surjektive Abbildung.	☐ Ja ☐ Nein
$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x^2 + 2y$ ist eine surjektive Abbildung.	☐ Ja ☐ Nein
$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x^2 + 2y^2$ ist eine surjektive Abbildung.	☐ Ja ☐ Nein
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \mapsto (x, x^3)$ ist eine surjektive Abbildung.	☐ Ja ☐ Nein
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \mapsto (x^2, x^3)$ ist eine surjektive Abbildung.	☐ Ja ☐ Nein

LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 2

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Aufgabe 1

Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ beliebige Abbildungen zwischen den Mengen A, B und C. Sind die folgenden Aussagen für alle solchen Abbildungen richtig?

Ist $A = C$ und $g \circ f = \mathrm{id}_A$, so ist f bijektiv.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $A = C$ und $g \circ f = \mathrm{id}_A$, so ist f injektiv.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $A = C$ und $g \circ f = \mathrm{id}_A$, so ist f surjektiv.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $A = C$ und $g \circ f = \mathrm{id}_A$, so ist g bijektiv.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $A = C$ und $g \circ f = \mathrm{id}_A$, so ist g injektiv.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $A = C$ und $g \circ f = \mathrm{id}_A$, so ist g surjektiv.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $g \circ f$ injektiv, so ist g injektiv.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist f surjektiv.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.	☐ Ja ☐ Nein
Sind f und g injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv.	☐ Ja ☐ Nein
Sind f und g surjektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv.	☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 2

Gelten die folgenden Aussagen für alle Abbildungen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ und $g : \mathbb{Q} \to \{1, 2, 3\}$?

$f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.	☐ Ja ☐ Nein
g ist nicht injektiv.	☐ Ja ☐ Nein
g ist nicht injektiv.	☐ Ja ☐ Nein
g ist surjektiv.	☐ Ja ☐ Nein
$g(\mathbb{Q}) = \{1, 2, 3\}$.	☐ Ja ☐ Nein
$g(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$.	☐ Ja ☐ Nein

$g(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$.	☐ Ja ☐ Nein
$\overset{-1}{f}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}$.	☐ Ja ☐ Nein
$\overset{-1}{f}(\mathbb{Q}) \neq \mathbb{Z}$.	☐ Ja ☐ Nein
$\overset{-1}{f}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.	☐ Ja ☐ Nein
$\overset{-1}{f}(\mathbb{Z}) \neq \mathbb{Z}$.	☐ Ja ☐ Nein
$\overset{-1}{g}(\{1,2,3\}) = \mathbb{Q}$.	☐ Ja ☐ Nein
$\overset{-1}{g}(\{1,2,3\}) \neq \mathbb{Q}$.	☐ Ja ☐ Nein
Besitzt jede Faser von f genau ein Element, so ist f bijektiv.	☐ Ja ☐ Nein
Besitzt jede Faser von f mindestens ein Element, so ist f bijektiv.	☐ Ja ☐ Nein
Ist keine Faser von g leer, so ist g injektiv.	☐ Ja ☐ Nein
Ist keine Faser von g leer, so ist g surjektiv.	☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 3

Welcher der folgenden Mengen sind Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{Z}$?

$\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a + b = 0\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	☐ Ja ☐ Nein
$\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a + b = 1\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	☐ Ja ☐ Nein
$\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a, b \geq 0\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	☐ Ja ☐ Nein
$\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a^2 - b^2 = 0\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	☐ Ja ☐ Nein
$\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 17 \text{ teilt } a - b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	☐ Ja ☐ Nein
$\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 2 \text{ teilt } a + b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	☐ Ja ☐ Nein
$\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 3 \text{ teilt } a + b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	☐ Ja ☐ Nein

$\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 7 \text{ teilt } a+b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	☐ Ja ☐ Nein
$\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 7 \text{ teilt } a-b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	☐ Ja ☐ Nein
$\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a+b \text{ ist nicht durch 7 teilbar}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	☐ Ja ☐ Nein
$\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a+b \text{ ist ungerade}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 4

Es sei K ein beliebiger Körper. Kreuzen Sie bei den folgenden Fragen “Ja” nur an, wenn die Aussage für jeden Körper K gilt. Wenn es auch nur einen Körper gibt, für den die Aussage nicht gilt, müssen Sie “Nein” ankreuzen.

Die Abbildung $K \to K, x \mapsto x + x$ ist bijektiv.	☐ Ja ☐ Nein
Die Abbildung $K \to K, x \mapsto x + x + x$ ist bijektiv.	☐ Ja ☐ Nein
Die Gleichung $x \cdot a + x = -1$ hat für jedes a eine Lösung.	☐ Ja ☐ Nein
Die Gleichung $x \cdot a + x = 0$ hat für jedes a eine Lösung.	☐ Ja ☐ Nein
Für jedes $a \in K$ ist die Abbildung $K \to K, x \mapsto a + x$ bijektiv.	☐ Ja ☐ Nein
Für jedes $a \in K$ ist die Abbildung $K \to K, x \mapsto ax$ bijektiv.	☐ Ja ☐ Nein
Für jedes $a \in K$ mit $a \neq 0$ ist die Abbildung $K \to K, x \mapsto ax$ bijektiv.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $a \in K$ und $a^2 = 1$, so folgt $a = 1$ oder $a = -1$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $a^{-1} = a$, so ist $a = 1$.	☐ Ja ☐ Nein
Sind $a, b \in K$ mit $a^2 - ab - ba + b^2 = 0$, so ist $a = b$.	☐ Ja ☐ Nein
Sind $a, b \in K$ und $(a - b)^2 = 0$, so ist $a = b$.	☐ Ja ☐ Nein

LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 3

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Dabei sei R stets ein kommutativer Ring mit Eins.

R ist genau dann ein Körper, wenn es keine $a, b \in R \setminus \{0\}$ gibt mit $a \cdot b = 0$.	☐ Ja ☐ Nein
$\mathbb{Z}_m$ ist für $m \geq 2$ genau dann ein Körper, wenn es keine $a, b \in \mathbb{Z}_m \setminus \{0\}$ gibt mit $a \cdot b = 0$.	☐ Ja ☐ Nein
Die Abbildung $\mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$, $x \mapsto x^3$ ist surjektiv.	☐ Ja ☐ Nein
Die Abbildung $\mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_7$, $x \mapsto x^3$ ist surjektiv.	☐ Ja ☐ Nein
Ist K ein Körper und $K \to K$, $x \mapsto x^2$ injektiv, so ist $1 + 1 = 0$ in K.	☐ Ja ☐ Nein
Ist K ein Körper und $K \to K$, $x \mapsto x^3$ injektiv, so ist $1 + 1 + 1 = 0$ in K.	☐ Ja ☐ Nein
Ist für $a \in R$ die Abbildung $R \to R$, $x \mapsto ax$ injektiv, so ist a invertierbar.	☐ Ja ☐ Nein
Ist für $a \in R$ die Abbildung $R \to R$, $x \mapsto ax$ surjektiv, so ist a invertierbar.	☐ Ja ☐ Nein
Ist für jedes $a \in R \setminus \{0\}$ die Abbildung $R \to R$, $x \mapsto a(x+1)$ surjektiv, so ist R ein Körper.	☐ Ja ☐ Nein
Ist für jedes $a \in R \setminus \{0\}$ die Abbildung $R \to R$, $x \mapsto ax + 1$ surjektiv, so ist R ein Körper.	☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 2

Wir rechnen in $\mathbb{Z}_m$ und schreiben $\overline{a} := R_m(a) = a + m\mathbb{Z}$ für $a \in Z$. Beantworten Sie die folgenden Fragen, indem Sie das richtige Ergebnis ankreuzen bzw. eingeben.

Es sei $m = 101$; dann ist $\overline{2}^{100}$ gleich (a) $\overline{24}$ (b) $\overline{2}$ (c) $\overline{1}$	☐ (a) ☐ (b) ☐ (c)
Es sei $m = 101$; dann ist $\overline{2}^{101}$ gleich (a) $\overline{48}$ (b) $\overline{2}$ (c) $\overline{1}$	☐ (a) ☐ (b) ☐ (c)
Es sei $m = 17$; dann ist $\overline{5}^{-1}$ gleich (a) $\overline{5}$ (b) $\overline{7}$ (c) $\overline{12}$	☐ (a) ☐ (b) ☐ (c)
Es sei $m = 17$; dann ist $\overline{7} \cdot \overline{4} + \overline{3}$ gleich (a) $\overline{14}$ (b) $\overline{12}$ (c) $\overline{3}$	☐ (a) ☐ (b) ☐ (c)
Es sei $m = 17$; dann ist $\overline{7} \cdot \overline{4} + \overline{3}$ gleich (a) $\overline{13}$ (b) $\overline{14}$ (c) $\overline{2}$	☐ (a) ☐ (b) ☐ (c)

Es sei $m = 17$; dann ist $\overline{7}^{-1}$ gleich (a) $\overline{5}$ (b) $\overline{7}$ (c) $\overline{11}$	☐ (a) ☐ (b) ☐ (c)
Was ist die letzte Dezimalziffer von 3^{100810}?	
Was ist die letzte Dezimalziffer von 3^{120409}?	
Wieviele invertierbare Elemente gibt es in $\mathbb{Z}_6$?	
Wieviele invertierbare Elemente gibt es in $\mathbb{Z}_8$?	

Aufgabe 3

$\mathbb{C}$ sei der Körper aus Blatt 2 Aufgabe 6. Für einige Teilaufgaben betten wir ein: $\mathbb{R} = \{(x,y) \in \mathbb{C} \mid y = 0\}$. Sind die folgenden Aussagen richtig?

Die Gleichung $x^2 = a$ hat für jedes $0 \neq a \in \mathbb{C}$ genau 2 Lösungen in $\mathbb{C}$.	☐ Ja ☐ Nein
Die Gleichung $x^2 = a$ hat für jedes $a \in \mathbb{C}$ genau 2 Lösungen in $\mathbb{C}$.	☐ Ja ☐ Nein
Es gibt einen Körper, in dem die Gleichung $x^2 = -1$ genau 2 Lösungen hat.	☐ Ja ☐ Nein
Es gibt einen Körper, in dem die Gleichung $x^2 = -1$ keine Lösung hat.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, so ist $a + a^{-1} \in \mathbb{R}$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, so ist $a^{-1} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist in einem Ring mit 1 ein Element a invertierbar, dann ist auch a^3 invertierbar.	☐ Ja ☐ Nein
Ist in einem Ring mit 1 ein Element a invertierbar, dann ist auch a^2 invertierbar.	☐ Ja ☐ Nein
Sind $a, b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, so ist $a + b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.	☐ Ja ☐ Nein
Sind $a, b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, so ist $a \cdot b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.	☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 4

LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 3

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem mit $a_{ij} \in \mathbb{Q}$:

$$\begin{array}{cccccccccc} a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & +\ldots+ & a_{1n} & x_n & = & 0 \\ a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & +\ldots+ & a_{2n} & x_n & = & 0 \\ & & & & \vdots & & & & & \\ a_{m1} & x_1 & + & a_{m2} & x_2 & +\ldots+ & a_{mn} & x_n & = & 0 \end{array}$$

Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Lösung ist und $c \in \mathbb{Q}$, dann ist auch $(c\,b_1, \ldots, c\,b_n)$ eine Lösung.	☐ Ja ☐ Nein
Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Lösung ist, ist $(b_1 + 1, \ldots, b_n + 1)$ keine Lösung.	☐ Ja ☐ Nein
Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Lösung ist, ist $(b_1 + 1, \ldots, b_n + n)$ keine Lösung.	☐ Ja ☐ Nein
Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Lösung ist, ist $(b_1 - 1, \ldots, b_n - 1)$ keine Lösung.	☐ Ja ☐ Nein
Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Lösung ist, ist $(b_1 - 1, \ldots, b_n - n)$ keine Lösung.	☐ Ja ☐ Nein
Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Lösung ist, ist auch $(b_1 + 1, \ldots, b_n + 1)$ eine Lösung.	☐ Ja ☐ Nein
Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Lösung ist, ist auch $(b_1 + 1, \ldots, b_n + n)$ eine Lösung.	☐ Ja ☐ Nein
Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Lösung ist, ist auch $(b_1 - 1, \ldots, b_n - 1)$ eine Lösung.	☐ Ja ☐ Nein
Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Lösung ist, ist auch $(b_1 - 1, \ldots, b_n - n)$ eine Lösung.	☐ Ja ☐ Nein
Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ und $(c_1, \ldots, c_n)$ Lösungen sind, ist auch $(b_1 + c_1, \ldots, b_n + c_n)$ eine Lösung.	☐ Ja ☐ Nein
Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ und $(c_1, \ldots, c_n)$ Lösungen sind, ist auch $(b_1 - c_1, \ldots, b_n - c_n)$ eine Lösung.	☐ Ja ☐ Nein
Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ und $(c_1, \ldots, c_n)$ Lösungen sind, ist auch $(b_1 - c_1, \ldots, b_n - c_n)$ eine Lösung.	☐ Ja ☐ Nein
Wenn $m > n$ ist, hat das System keine Lösung.	☐ Ja ☐ Nein
Wenn $m = n$ ist, hat das System genau eine Lösung.	☐ Ja ☐ Nein
Wenn $m = n - 1$ ist, hat das System genau eine Lösung.	☐ Ja ☐ Nein
Wenn es eine von der Nulllösung $\underline{0}$ verschiedene Lösung gibt, gibt es auch eine von $\underline{0}$ verschiedene ganzzahlige Lösung.	☐ Ja ☐ Nein
Wenn es eine von der Nulllösung $\underline{0}$ verschiedene Lösung gibt, gibt es auch eine von $\underline{0}$ verschiedene Lösung, die nicht ganzzahlig ist.	☐ Ja ☐ Nein

LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 4

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Aufgabe 1

Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ mit 2 Elementen:

$$\begin{array}{ccccccccccccl} x_1 & & & + & x_3 & & & + & x_5 & + & x_6 & = & 0 \\ & & x_2 & + & ax_3 & + & x_4 & + & x_5 & & & = & 1 \\ x_1 & & & & & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & 1 \quad (*) \\ & & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & + & x_6 & = & 1 \end{array}$$

Hier ist a eine Zahl aus $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}_2$, die jeweils unten angegeben ist.

$(1, 1, 0, 0, 1, 0)$ ist für $a = 1$ eine Lösung.	☐ Ja ☐ Nein
$(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ist für $a = 0$ eine Lösung.	☐ Ja ☐ Nein
Das Gleichungssystem ist homogen.	☐ Ja ☐ Nein
Das Gleichungssystem ist inhomogen.	☐ Ja ☐ Nein
Für $a = 0$ erfüllt jede Lösung die Gleichung $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 = 1$.	☐ Ja ☐ Nein
Für $a = 0$ gibt es keine Lösung $(x_1, \ldots, x_6)$ mit $x_1 = x_5 = x_6 = 0$.	☐ Ja ☐ Nein
Für $a = 1$ erfüllt jede Lösung die Gleichung $x_1 + x_3 + x_4 + x_6 = 1$.	☐ Ja ☐ Nein
Für $a = 1$ gibt es keine Lösung $(x_1, \ldots, x_6)$ mit $x_1 = x_5 = x_6 = 0$.	☐ Ja ☐ Nein
Wieviele Lösungen hat das Gleichungssystem für $a = 0$?	
Wieviele Lösungen hat das Gleichungssystem für $a = 1$?	

Aufgabe 2

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume in den jeweils angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräumen?

$U := \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times4} \mid a_{11} + a_{12} = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{3\times4}$	☐ Ja ☐ Nein
$U := \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times4} \mid a_{11} + a_{12} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{3\times4}$	☐ Ja ☐ Nein
$U := \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{4\times3} \mid a_{11} \cdot a_{22} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{4\times3}$	☐ Ja ☐ Nein
$U := \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{4\times3} \mid a_{11}^2 + a_{22}^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{4\times3}$	☐ Ja ☐ Nein

$U := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A \text{ ist invertierbar}\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$	☐ Ja ☐ Nein
$U := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = A^2\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$	☐ Ja ☐ Nein
$U := \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)\right\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	☐ Ja ☐ Nein
$U := \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \text{ es gibt } c \in \mathbb{R} \text{ mit } f(x) \leq c \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	☐ Ja ☐ Nein
$U_c := \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) \leq c \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit $c \in \mathbb{R}$	☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 3

Mit E_n sei jeweils die n-reihige Einheitsmatrix bezeichnet und mit 0_n die n-reihige Nullmatrix. Sind die folgenden Aussagen über Matrizen richtig?

Ist $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = E_3$ und $n > 1$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = E_3$ und $n > 1$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $A \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ mit $A^6 = E_{100}$ und $A^{10} = E_{100}$, dann ist auch $A^2 = E_{100}$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $A \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ mit $A^6 = E_{100}$ und $A^{14} = E_{100}$, dann ist auch $A^2 = E_{100}$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A^2 = 0_2$, so ist $A = 0_2$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A^2 = E_2$, so ist $A = \pm E_2$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und gilt $A \cdot B \cdot A = A$, so ist $A \cdot B = E_m$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und gilt $A \cdot B \cdot A = A$, so ist $B \cdot A = E_n$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und gilt $B \cdot A = E_n$, so ist $A \cdot B = E_m$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und gilt $A \cdot B = E_m$, so ist $B \cdot A = E_n$.	☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 4

LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 4

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Betrachten Sie die folgenden Matrizen mit reellen Koeffizienten. $A := \begin{bmatrix} 14 & -13 \\ 1 & -19 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B := \begin{bmatrix} 14 & -13 & 2 \\ 1 & -19 & 5 \end{bmatrix}$, $C := \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 9 & 12 & -24 \end{bmatrix}$, $D := \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$. Entscheiden Sie für jeden der folgenden Ausdrücke, ob er sinnvoll ist und eine Matrix $X = [x_{ij}]$ definiert. Falls nein, kreuzen Sie **Q** an (für Quatsch) und sonst kreuzen sie den Eintrag x_{11} an.

$X = 4AB - 183C$	☐ Q ☐ 0 ☐ 1
$X = 7BA - 193D^2$	☐ Q ☐ 0 ☐ 1
$X = ABA - 170A$	☐ Q ☐ 180 ☐ 62
$X = ADB - 4C^2$	☐ Q ☐ 79 ☐ 18
$X = CAC$	☐ Q ☐ -97 ☐ 188
$X = CAD + A$	☐ Q ☐ 180 ☐ 62
$X = C^3A - D$	☐ Q ☐ 326 ☐ 388
$X = DBA - D^3$	☐ Q ☐ 79 ☐ 18
$X = DBD$	☐ Q ☐ -97 ☐ 188
$X = D^3B - C$	☐ Q ☐ 326 ☐ 388

LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 5

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Aufgabe 1

Es seien $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 1}$. Beantworten Sie die folgenden Fragen durch Angabe einer ganzen Zahl.

Fur welches $s \in \mathbb{Q}$ ist $\left(\begin{bmatrix} s \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}\right)$ keine Basis von $\mathbb{Q}^{3\times 1}$?	
Fur welches $s \in \mathbb{Q}$ ist $\left(\begin{bmatrix} s \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}\right)$ keine Basis von $\mathbb{Q}^{3\times 1}$?	
Fur welches $s \in \mathbb{Q}$ ist $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ s \end{bmatrix}$ eine Linearkombination von (v, w)?	
Fur welches $s \in \mathbb{Q}$ ist $\begin{bmatrix} 6 \\ s \\ 12 \end{bmatrix} \in \langle v, w \rangle$?	
Fur welches $s \in \mathbb{Q}$ ist $\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ s \end{bmatrix}$ ein Linearkombination von (v, w)?	
Fur welches $s \in \mathbb{Q}$ ist $\begin{bmatrix} 0 \\ s \\ -12 \end{bmatrix} \in \langle v, w \rangle$?	
Fur welches $s \in \mathbb{Q}$ liegt $\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ s \end{bmatrix}$ im Erzeugnis von $\{v, w\}$?	
Fur welches $s \in \mathbb{Q}$ liegt $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ s \end{bmatrix}$ im Erzeugnis von $\{v, w\}$?	
Ist $s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{Q}$, was ist dann $s - t$?	
Ist $s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{Q}$, was ist dann $s - t$?	

Aufgabe 2

Es sei $V := \mathbb{R}^{1\times 3} = \{[a, b, c] \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller 1×3-Matrizen über $\mathbb{R}$, und es seien in V die Vektoren $v_1 = [2, 1, 3]$, $v_2 = [1, 0, 2]$, $v_3 = [3, 2, 4]$ und $v_4 = [1, 2, 3]$ gegeben. Sind die folgenden Aussagen richtig?

Das Erzeugnis $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ist ganz V.	☐ Ja ☐ Nein

Das Erzeugnis $\langle v_2, v_4, v_1\rangle$ ist ganz V.	☐ Ja ☐ Nein
Das Erzeugnis $\langle v_3, v_4, v_2\rangle$ ist ganz V.	☐ Ja ☐ Nein
Das Erzeugnis $\langle v_4, v_2, v_4\rangle$ ist ganz V.	☐ Ja ☐ Nein
Der Vektor $[1, 0, 1]$ aus V liegt im Erzeugnis $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$.	☐ Ja ☐ Nein
Der Vektor $[1, 1, 0]$ aus V liegt im Erzeugnis $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$.	☐ Ja ☐ Nein
Der Vektor $[1, 1, 1]$ aus V liegt im Erzeugnis $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$.	☐ Ja ☐ Nein
Die Erzeugnisse $\langle v_1, v_2\rangle$ und $\langle v_1, v_3\rangle$ sind gleich.	☐ Ja ☐ Nein
Die Erzeugnisse $\langle v_1, v_2\rangle$ und $\langle v_1, v_4\rangle$ sind gleich.	☐ Ja ☐ Nein
Die Erzeugnisse $\langle v_1, v_2\rangle$ und $\langle v_3, v_4\rangle$ sind gleich.	☐ Ja ☐ Nein
Die Erzeugnisse $\langle v_1, v_3\rangle$ und $\langle v_1, v_4\rangle$ sind gleich.	☐ Ja ☐ Nein
Die Erzeugnisse $\langle v_1, v_3\rangle$ und $\langle v_2, v_3\rangle$ sind gleich.	☐ Ja ☐ Nein
Fur alle $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt $\langle v_i, v_j\rangle = \{a \cdot v_i + b \cdot v_j \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.	☐ Ja ☐ Nein
Fur alle $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt $\langle v_i, v_j\rangle = \{a \cdot v_i + a \cdot v_j \mid a \in \mathbb{R}\}$.	☐ Ja ☐ Nein
Fur alle $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt $\langle v_i, v_j\rangle = \{a \cdot v_i + b \cdot v_j \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.	☐ Ja ☐ Nein
Fur alle $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt $\langle v_i, v_j\rangle = \{a \cdot v_i + b \cdot v_j \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.	☐ Ja ☐ Nein
Fur alle $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt: Das Erzeugnis $\langle v_i, v_i, v_j\rangle$ ist ein Teilraum von $\langle v_i, v_j\rangle$.	☐ Ja ☐ Nein
Fur alle $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt: Das Erzeugnis $\langle v_i, v_k\rangle$ ist ein Teilraum von $\langle v_i, v_j, v_k\rangle$.	☐ Ja ☐ Nein
Fur alle $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt: Das Erzeugnis $\langle v_i, v_j, v_k\rangle$ ist ein Teilraum von $\langle v_i, v_j\rangle$.	☐ Ja ☐ Nein
Fur alle $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt: Das Erzeugnis $\langle v_i, v_j, v_k\rangle$ ist ein Teilraum von $\langle v_j, v_i, v_k\rangle$.	☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 3

Sind die folgenden Teilmengen (bzw. Folgen) der angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräume linear unabhängig?

$((2,0,0),(1,3,3),(3,5,3))$ in $\mathbb{R}^3$.	☐ Ja ☐ Nein
$((2,0,0),(1,3,3),(3,5,5))$ in $\mathbb{R}^3$.	☐ Ja ☐ Nein
$((2,0,2),(1,3,4),(3,5,-2))$ in $\mathbb{R}^3$.	☐ Ja ☐ Nein
$((2,0,2),(1,3,4),(3,5,8))$ in $\mathbb{R}^3$.	☐ Ja ☐ Nein
$\{(1,1),(1,-1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$.	☐ Ja ☐ Nein
$\{(2,1),(1,2)\} \subseteq \mathbb{R}^2$.	☐ Ja ☐ Nein
$\{f_1, f_2, f_3\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, wobei $f_i(x) = x^i$ ist $(i = 1, 2, 3)$.	☐ Ja ☐ Nein
$\{f_1, f_2, f_3\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, wobei $f_i(x) = x^i + i$ ist $(i = 1, 2, 3)$.	☐ Ja ☐ Nein
$\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$.	☐ Ja ☐ Nein
$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$.	☐ Ja ☐ Nein
$\{e\} \cup \{e_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, wobei $e(j) = 1$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und $e_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{für } j = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.	☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 4

Sei V ein K-Vektorraum und $X \subseteq Y \subseteq V$. Dann gilt:

Es ist $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $X \neq Y$, so ist $\langle X \rangle \neq \langle Y \rangle$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist X Basismenge von V, so auch Y.	☐ Ja ☐ Nein
Ist X ein Teilraum, so ist $\langle X \rangle = X$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist X Erzeugendensystem von V, so auch Y.	☐ Ja ☐ Nein
Ist X linear abhängig, dann ist auch Y linear abhängig.	☐ Ja ☐ Nein
Ist X linear unabhängig, dann ist auch Y linear unabhängig.	☐ Ja ☐ Nein
Ist Y ein Teilraum, so ist $\langle X \rangle \subseteq Y$.	☐ Ja ☐ Nein

Ist Y linear abhängig, so ist auch X linear abhängig.	☐ Ja ☐ Nein
Ist Y linear unabhängig, so ist auch X linear unabhängig.	☐ Ja ☐ Nein

LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 6

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Aufgabe 1

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K und U und W Teilräume von V mit $V = U + W$. Weiter seien $X = \{u_1, \ldots, u_m\} \subseteq U$ eine m-elementige und $Y = \{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq W$ eine n-elementige Teilmenge.

Ist $(u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n)$ Basisfolge von V, so ist X Basis von U und Y Basis von W.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $U \cap W = \{\underline{0}\}$ und X Basis von U und Y Basis von W, so ist $X \cup Y$ Basis von V.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $U \cap W = \{\underline{0}\}$ und sind X und Y linear unabhängig, so ist auch $X \cup Y$ linear unabhängig.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $X \cup Y$ Basis von V, so ist X Basis von U und Y Basis von W.	☐ Ja ☐ Nein
Ist X Basis von U und Y Basis von W, so ist $X \cup Y$ Basis von V.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $\dim U = \lvert X \rvert = m$ und $\dim W = \lvert Y \rvert = n$, so ist $\dim V \geq m + n$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $\dim V = m + n$ und $\langle X \rangle = U$ und $\langle Y \rangle = W$, so ist $X \cup Y$ Basis von V.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $\langle X \cup Y \rangle = V$, so ist $\langle X \rangle = U$ und $\langle Y \rangle = W$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $\langle X \rangle = U$ und $\langle Y \rangle = W$, so ist $\langle X \cup Y \rangle = V$.	☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 2

Es seien K ein Körper, $v = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ und $w = (y_1, \ldots, y_n) \in K^n$. Ferner sei $f_i : K \to K, x \mapsto x^i$ und $g_i : K \to K, x \mapsto x^i + 1$ für $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. (Beachten Sie, dass hier $x^0 = 1$ für alle $x \in K$ ist.)

(v, w) ist genau dann linear abhängig, wenn $x_i y_j = x_j y_i$ für alle i und j mit $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq n$ gilt.	☐ Ja ☐ Nein
(v, w) ist genau dann linear unabhängig, wenn es i und j gibt mit $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq n$, für die $x_i y_j \neq x_j y_i$ gilt.	☐ Ja ☐ Nein
Für $K = \mathbb{F}_2$ ist $\{f_0, f_1\}$ Basis von $\mathbb{F}_2^{\mathbb{F}_2}$.	☐ Ja ☐ Nein
Für $K = \mathbb{F}_2$ ist $\{f_0, f_1, f_2\}$ Basis von $\mathbb{F}_2^{\mathbb{F}_2}$.	☐ Ja ☐ Nein
Für $K = \mathbb{F}_2$ ist $\{g_0, g_1\}$ Basis von $\mathbb{F}_2^{\mathbb{F}_2}$.	☐ Ja ☐ Nein
Für $K = \mathbb{F}_2$ ist $\{g_0, g_1, g_2\}$ Basis von $\mathbb{F}_2^{\mathbb{F}_2}$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $K = \mathbb{Q}$ und $x_i = i$ und $y_i = -i + 1$ (jeweils für $1 \leq i \leq n$), so ist (v, w) linear unabhängig.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $K = \mathbb{Q}$ und $x_i = i$ und $y_i = -i + 1$ (jeweils für $1 \leq i \leq n$), so ist (v, w) linear abhängig.	☐ Ja ☐ Nein

Ist $w \neq s \cdot v$ für alle $s \in K$, so ist (v, w) linear unabhängig.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $\langle v, w \rangle = K^n$, so ist $n \leq 2$.	☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 3

Es sei K ein Körper und A die folgende Matrix:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}.$$

Berechnen Sie die folgenden Dimensionen:

$\dim SR(A)$ mit A wie oben.	
$\dim U$ mit $U = \langle (0,1,2,3), (1,2,3,4), (2,3,4,5), (3,4,5,6) \rangle \leq \mathbb{R}^4$.	
$\dim U$ mit $U = \langle (1,2,3,0), (0,1,2,3), (3,0,1,2), (2,3,0,1) \rangle \leq \mathbb{R}^4$.	
$\dim ZR(A)$ mit A wie oben.	
$\dim\langle f_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ mit $f_n : i \mapsto 1 + ni$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.	
$\dim\langle f_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ mit $f_n : i \mapsto n \cdot i - 1$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.	
$\dim \{[a_{i,j}] \in K^{3\times 3} \mid a_{i,j} - a_{j,i} = 0$ für $i, j \in \{1,2,3\}\}$.	
$\dim \{[a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid a_{i,j} + a_{j,i} = 0$ für $i, j \in \{1,2,3\}\}$.	
$\dim\{x \in \mathbb{Q}^{1\times 3} \mid x \cdot A = \underline{0}\}$ mit A wie oben.	
$\dim\{x \in \mathbb{Q}^{3\times 1} \mid A \cdot x = \underline{0}\}$ mit A wie oben.	

Aufgabe 4

Es seien K ein Körper, V und W endlich-erzeugte Vektorräume über K und $\varphi : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

Ist (b_1, b_2, b_3) eine Basisfolge von V und φ surjektiv, dann ist $(\varphi(b_1), \varphi(b_2), \varphi(b_3))$ eine Basisfolge von W.	☐ Ja ☐ Nein
Ist (b_1, b_2, b_3) eine Basisfolge von V, dann ist $(\varphi(b_1), \varphi(b_2), \varphi(b_3))$ eine Basisfolge von W.	☐ Ja ☐ Nein
Sind b_1 und b_2 in V und ist $(\varphi(b_1), \varphi(b_2))$ linear unabhängig, dann ist (b_1, b_2) linear unabhängig.	☐ Ja ☐ Nein

Sind b_1 und b_2 in V und ist $(\varphi(b_1), \varphi(b_2))$ linear abhängig, dann ist (b_1, b_2) linear abhängig.	☐ Ja ☐ Nein
Sind b_1 und b_2 in V und ist (b_1, b_2) linear unabhängig und φ injektiv, dann ist $(\varphi(b_1), \varphi(b_2))$ linear unabhängig.	☐ Ja ☐ Nein
Sind b_1 und b_2 in V und ist (b_1, b_2) linear unabhängig und φ surjektiv, dann ist $(\varphi(b_1), \varphi(b_2))$ linear unabhängig.	☐ Ja ☐ Nein
Wenn φ injektiv ist, dann ist $\dim V \leq \dim W$.	☐ Ja ☐ Nein
Wenn φ surjektiv ist, dann ist $\dim V \leq \dim W$.	☐ Ja ☐ Nein
Wenn es eine Basisfolge $(b_1, \ldots, b_n)$ von V gibt, so dass $(\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n))$ eine Basisfolge von W ist, dann ist φ ein Isomorphismus.	☐ Ja ☐ Nein
Wenn für jede Basisfolge $(b_1, \ldots, b_n)$ von V gilt, dass $(\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n))$ eine Basisfolge von W ist, dann ist φ ein Isomorphismus.	☐ Ja ☐ Nein

LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 7

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Aufgabe 1

Entscheiden Sie jeweils, ob die unten definierten Abbildungen $\varphi : V \to W$ K-linear sind.

K beliebiger Körper, $V = K^{3\times 2}$, $W = K^{2\times 2}$, $\varphi : X \mapsto A \cdot X$ für festes $A \in K^{2\times 3}$.	☐ Ja ☐ Nein
K beliebiger Körper, $V = K^{3\times 2}$, $W = K^{3\times 3}$, $\varphi : X \mapsto X \cdot A$ für festes $A \in K^{2\times 3}$.	☐ Ja ☐ Nein
$K = \mathbb{F}_2$, $V = W = \mathbb{F}_2$, $\varphi : x \mapsto x + x^2$.	☐ Ja ☐ Nein
$K = \mathbb{F}_2$, $V = W = \mathbb{F}_2$, $\varphi : x \mapsto x^2$.	☐ Ja ☐ Nein
$K = \mathbb{Q}$, $V = W = \mathbb{Q}$, $\varphi : x \mapsto 3x$.	☐ Ja ☐ Nein
$K = \mathbb{Q}$, $V = W = \mathbb{Q}$, $\varphi : x \mapsto x + 1$.	☐ Ja ☐ Nein
$K = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\varphi(f) : x \mapsto f(x+1) + x$ für $f \in V$, $x \in K$.	☐ Ja ☐ Nein
$K = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\varphi(f) : x \mapsto xf(x^2 - 1)$ für $f \in V$, $x \in K$.	☐ Ja ☐ Nein
$K = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\varphi(f) : x \mapsto x^2 f(x^2 + 1)$ für $f \in V$, $x \in K$.	☐ Ja ☐ Nein
$K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}$, $\varphi : (x_1, x_2, x_3) \mapsto 1 + 2x_2 + 3x_3$.	☐ Ja ☐ Nein
$K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}$, $\varphi : (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 + x_2$.	☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 2

Es sei K ein Körper. Beantworten Sie die folgenden Fragen:

Es sei $V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\} \subseteq K^n$. Gibt es eine surjektive, lineare Abbildung $\varphi : V \to K^{n-1}$?	☐ Ja ☐ Nein
Es sei $V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\} \subseteq K^n$. Gibt es eine surjektive, lineare Abbildung $\varphi : V \to K^n$?	☐ Ja ☐ Nein
Es sei $\varphi : K^3 \to K^2$ ein Epimorphismus. Gibt es eine lineare Abbildung $\psi : K^2 \to K^3$, so dass $\psi \circ \varphi$ ein Isomorphismus ist?	☐ Ja ☐ Nein
Es sei $\varphi : K^3 \to K^2$ ein Epimorphismus. Gibt es eine lineare Abbildung $\psi : K^2 \to K^3$, so dass $\varphi \circ \psi$ ein Isomorphismus ist?	☐ Ja ☐ Nein
Gibt es eine Abbildung $\varphi : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$, die nicht $\mathbb{F}_2$-linear ist?	☐ Ja ☐ Nein
Gibt es eine Abbildung $\varphi : \mathbb{F}_3 \to \mathbb{F}_3$, die nicht $\mathbb{F}_3$-linear ist?	☐ Ja ☐ Nein
Gibt es eine injektive, lineare Abbildung $\varphi : K^{2\times 3} \to K^{2\times 2}$?	☐ Ja ☐ Nein
Gibt es eine injektive, lineare Abbildung $\varphi : K^{2\times 3} \to K^{3\times 2}$?	☐ Ja ☐ Nein

LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 7

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(1,-1,0) = (1,1)$ und $\varphi(0,1,-1) = (0,1)$ und $\varphi(1,0,-1) = (1,2)$?	☐ Ja ☐ Nein
Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(1,-1,0) = (1,2)$ und $\varphi(0,1,-1) = (0,1)$ und $\varphi(1,0,-1) = (1,1)$?	☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 3

Es seien K ein Körper und $\varphi : V \to W$ und $\psi : W \to V$ lineare Abbildungen zwischen den K-Vektorräumen V und W. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

Bild $(\psi \circ \varphi) =$ Kern $(\varphi \circ \psi)$	☐ Ja ☐ Nein
Bild $(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Bild φ	☐ Ja ☐ Nein
Bild $(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Bild ψ	☐ Ja ☐ Nein
Bild $\psi \subseteq$ Bild $(\psi \circ \varphi)$	☐ Ja ☐ Nein
Bild $\varphi \subseteq$ Bild $(\psi \circ \varphi)$	☐ Ja ☐ Nein
Kern $(\psi \circ \varphi) =$ Bild $(\varphi \circ \psi)$	☐ Ja ☐ Nein
Kern $(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Kern ψ	☐ Ja ☐ Nein
Kern $(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Kern φ	☐ Ja ☐ Nein
Kern $\psi \subseteq$ Kern $(\psi \circ \varphi)$	☐ Ja ☐ Nein
Kern $\varphi \subseteq$ Kern $(\psi \circ \varphi)$	☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 4

Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen. Bestimmen Sie jeweils die Anzahl der Elemente in den folgenden Mengen.

K^2 für $q = 13$.	
K^3 für $q = 5$.	
$M = \{\varphi \in \mathrm{Hom}_K(K^{2\times 2}, K) \mid \varphi(E_2) = 0\}$ und $q = 3$.	
$M = \{\varphi \in \mathrm{Hom}_K(K^{2\times 2}, K) \mid \varphi(E_2) = 1\}$ und $q = 3$.	
Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $Ax = 0$, wobei $A \in K^{2\times 3}$ vom Rang 2 ist und $q = 3$.	

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $Ax = 0$, wobei $A \in K^{3\times 2}$ vom Rang 1 ist und $q = 2$.	
Die Menge der 1-dimensionalen Untervektorräume von K^3 für $q = 5$.	
Die Menge der 1-dimensionalen Untervektorräume von K^4 für $q = 3$.	
Die Menge der K-linearen Abbildungen von K^2 nach K für $q = 13$.	
Die Menge der K-linearen Abbildungen von K^2 nach K für $q = 17$.	

LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 8

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Aufgabe 1

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit m Gleichungen und n Unbekannten über dem Körper K.

Das Gleichungssystem ist genau dann unlösbar, wenn $\mathrm{Rg}\,A = \mathrm{Rg}([A, b]) - 1$ ist.	☐ Ja ☐ Nein
Das Gleichungssystem ist genau dann unlösbar, wenn $b \neq \underline{0}$ und $\mathrm{Rg}\,A = \mathrm{Rg}([A, b]) - 1$ ist.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $K = \mathbb{F}_2$ und $n \geq m$, so hat $Ax = \underline{0}$ genau 2^{n-m} Lösungen.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $K = \mathbb{F}_2$ und $n \geq m$, so hat $Ax = \underline{0}$ höchstens 2^{n-m} Lösungen.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $K = \mathbb{F}_2$ und $n \geq m$, so hat $Ax = \underline{0}$ mindestens 2^{n-m} Lösungen.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $K = \mathbb{F}_2$ und $n = 7$ und hat $Ax = b$ genau 4 Lösungen, so muss $m \geq 5$ sein.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $K = \mathbb{F}_2$ und $n = 7$ und hat $Ax = b$ genau 4 Lösungen, so muss $m \geq 9$ sein.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $m = 4$ und $n = 5$, so ist $Ax = b$ nicht eindeutig lösbar.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $m = 4$ und $n = 5$, so ist $Ax = b$ nicht lösbar.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $m = 4$ und $n = 5$, so ist $Ax = b$ stets lösbar.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $m = 7$ und $n = 5$, so ist $Ax = b$ nicht lösbar.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $m = 7$ und $n = 5$, so ist $Ax = b$ stets lösbar.	☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 2

Es sei

$$A = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{4\times 5}.$$

Wie viele Lösungen hat das Gleichungssystem $Ax = b$ für ...

$$b = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}?$$	

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

$b = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix}$?	
$b = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{2} \\ \bar{0} \end{bmatrix}$?	
$b = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}$?	
$b = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \end{bmatrix}$?	
$b = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}$?	
$b = \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}$?	

$b = \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{bmatrix}$?	
$b = \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{2} \end{bmatrix}$?	
$b = \begin{bmatrix} \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}$?	
$b = \begin{bmatrix} \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{2} \\ \bar{2} \end{bmatrix}$?	
$b = \begin{bmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{bmatrix}$?	

Aufgabe 3

Man berechne den Rang von $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ mit $n \geq 2$ und ...

$a_{i,j} = 2 \cdot i \cdot j$.	
$a_{i,j} = i \cdot j$.	
$a_{i,j} = i + j$.	

$a_{i,j} = i + j + 1.$	
$a_{i,j} = i - j.$	
$a_{i,j} = i - j + 1.$	
$a_{i,j} = i^j.$	
$a_{i,j} = i^{j+1}.$	
$a_{i,j} = \begin{cases} j & \text{für } i < j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$	
$a_{i,j} = \begin{cases} i & \text{für } i \geq j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$	

Aufgabe 4

Es sei $V := \mathbb{Q}^{2\times 3}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum der 2×3-Matrizen, $W := \mathbb{Q}^{2\times 2}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum der 2×2-Matrizen und $\varphi : V \to W$ die folgende $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung:

$$\varphi : V \longrightarrow W \quad , \quad M \longmapsto M \cdot A \quad , \quad \text{wobei } A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 2}.$$

Weiter seien die geordneten Basen

$$\mathcal{B} := \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

von V und

$$\mathcal{C} := \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \right)$$

von W gewählt. Berechnen Sie die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ von φ bezüglich dieser beiden Basen und geben Sie die verlangten Einträge an.

Der Eintrag in der 1. Zeile und der 1. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	
Der Eintrag in der 1. Zeile und der 3. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	
Der Eintrag in der 2. Zeile und der 2. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	
Der Eintrag in der 2. Zeile und der 5. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	
Der Eintrag in der 3. Zeile und der 2. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	

Der Eintrag in der 3. Zeile und der 5. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	
Der Eintrag in der 4. Zeile und der 2. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	
Der Eintrag in der 4. Zeile und der 4. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	
Der Eintrag in der 4. Zeile und der 5. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	
Der Eintrag in der 4. Zeile und der 6. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	

LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 9

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Aufgabe 1

Es sei $V = \langle \sin^2, \cos^2, \sin\cdot\cos\rangle \le \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (dabei ist natürlich $\sin^2 : x \mapsto (\sin x)^2$, etc.) und $\varphi, \psi : V \to V$ seien definiert durch

$$\varphi(f)(x) = f'(x) \quad \text{bzw.} \quad \psi(f)(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

für $f \in V$ und $x \in \mathbb{R}$. Überprüfen Sie, dass tatsächlich $\varphi, \psi \in \operatorname{End} V$ sind und dass $\mathcal{B} = (\sin^2, \cos^2, \sin\cdot\cos)$ eine Basis von V ist. Berechnen Sie ...

$(\psi \circ \varphi)(3\sin^2 + \cos^2) =$ (a) $-4\sin\cdot\cos$ (b) $\sin^2 - \cos^2$ (c) $\sin^2 + \cos^2 + \sin\cdot\cos$ (d) 0	☐ (a) ☐ (b) ☐ (c) ☐ (d)
$(\varphi \circ \psi)(\sin\cdot\cos) =$ (a) $-4\sin\cdot\cos$ (b) $\sin^2 - \cos^2$ (c) $\sin^2 + \cos^2 + \sin\cdot\cos$ (d) 0	☐ (a) ☐ (b) ☐ (c) ☐ (d)
$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\psi \circ \varphi)(1,1)$	
$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\psi \circ \varphi)(2,2)$	
$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\psi)(1,2)$	
$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\psi)(2,3)$	
$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi \circ \psi)(2,2)$	
$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi \circ \psi)(3,3)$	
$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)(1,3)$	
$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)(2,3)$	

Aufgabe 2

Es sei K ein Körper mit q Elementen und $A \in K^{n\times n}$.

$A \in \mathrm{GL}_n(K)$ genau dann, wenn die Spalten von A eine Basis von $K^{n\times 1}$ bilden.	☐ Ja ☐ Nein
$A \in \mathrm{GL}_n(K)$ genau dann, wenn die Zeilen von A eine Basis von $K^{1\times n}$ bilden.	☐ Ja ☐ Nein
Es sei $n = 3$ und $q = 3$. Dann ist die Anzahl der Basisfolgen $(v_1, \ldots, v_n)$ von $K^{n\times 1}$ gleich ...	
Es sei $n = 3$ und $q = 5$. Dann ist die Anzahl der Basisfolgen $(v_1, \ldots, v_n)$ von $K^{n\times 1}$ gleich ...	

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Es sei $q = 2$ und $n = 5$. Dann ist die Anzahl der $v_1 \in K^{n\times 1}$, die als erster Vektor einer Basisfolge von $K^{n\times 1}$ gewählt werden können, gleich …	
Es sei $q = 3$ und $n = 4$. Dann ist die Anzahl der $v_1 \in K^{n\times 1}$, die als erster Vektor einer Basisfolge von $K^{n\times 1}$ gewählt werden können, gleich …	
Es sei $q = 5$ und $n = 3$. Dann ist die Anzahl der $v_1 \in K^{n\times 1}$, die als erster Vektor einer Basisfolge von $K^{n\times 1}$ gewählt werden können, gleich …	
Für $q = 3$ ist die Anzahl der Elemente von $\mathrm{GL}_3(K)$ gleich …	
Für $q = 5$ ist die Anzahl der Elemente von $\mathrm{GL}_3(K)$ gleich …	
Ist $n = 2$ und $q = 3$, so ist $\lvert\{(v_1, v_2) \mid \{v_1, v_2\}$ ist eine Basis von $K^{2\times 1}\}\rvert$ gleich …	
Ist $n = 2$ und $q = 5$, so ist $\lvert\{(v_1, v_2) \mid \{v_1, v_2\}$ ist eine Basis von $K^{2\times 1}\}\rvert$ gleich …	

Aufgabe 3

Berechnen Sie das Signum der folgenden Permutationen aus der symmetrischen Gruppe S_{12}. Geben Sie als Ergebnis entweder $+1$ oder -1 ein.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 11 & 6 & 10 & 3 & 12 & 4 & 5 & 2 & 9 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$	☐ +1 ☐ -1
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 10 & 6 & 11 & 1 & 9 & 8 & 5 & 4 & 12 & 7 & 3 \end{pmatrix}$	☐ +1 ☐ -1
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 11 & 8 & 5 & 12 & 3 & 6 & 1 & 7 & 9 & 10 & 4 \end{pmatrix}$	☐ +1 ☐ -1
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 2 & 10 & 3 & 12 & 1 & 5 & 8 & 7 & 9 & 6 & 11 \end{pmatrix}$	☐ +1 ☐ -1
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 6 & 11 & 10 & 8 & 9 & 1 & 7 & 12 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$	☐ +1 ☐ -1
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 2 & 4 & 10 & 7 & 1 & 3 & 8 & 12 & 9 & 11 & 6 \end{pmatrix}$	☐ +1 ☐ -1
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 4 & 10 & 11 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 12 & 6 \end{pmatrix}$	☐ +1 ☐ -1
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 11 & 9 & 1 & 10 & 8 & 2 & 12 & 7 \end{pmatrix}$	☐ +1 ☐ -1
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 7 & 10 & 2 & 3 & 11 & 12 & 8 & 6 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$	☐ +1 ☐ -1

LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 9

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 10 & 7 & 5 & 11 & 1 & 8 & 12 & 6 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	□ +1 □ -1

Aufgabe 4

Es sei σ die folgende Permutation von 9 Punkten: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 9 & 4 & 1 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$. In den folgenden Fragen ist jeweils ein Produkt von Transpositionen angegeben, wobei an einer Stelle die Variable i anstelle einer der Ziffern von 1 bis 9 steht. Tragen Sie in das Antwortfeld die Ziffer ein, die man für i einsetzen muss, damit das Produkt gleich σ ist.

$(1\ 2)\ (1\ 3)\ (2\ 5)\ (9\ 8)\ (8\ 7)\ (7\ i)\ (3\ 6)$	
$(1\ 2)\ (1\ 3)\ (2\ 5)\ (i\ 8)\ (8\ 7)\ (7\ 6)\ (3\ 6)$	
$(1\ 2)\ (2\ 5)\ (3\ 9)\ (i\ 6)\ (7\ 8)\ (9\ 6)\ (1\ 6)$	
$(1\ 2)\ (i\ 7)\ (2\ 5)\ (1\ 6)\ (1\ 7)\ (3\ 9)\ (8\ 9)$	
$(1\ 3)\ (9\ 3)\ (9\ 8)\ (5\ 8)\ (8\ 2)\ (6\ 8)\ (7\ i)$	
$(4\ 5)\ (1\ 5)\ (9\ 8)\ (3\ 8)\ (6\ 2)\ (8\ 7)\ (2\ 4)\ (7\ i)\ (1\ 4)$	
$(5\ 7)\ (2\ 7)\ (6\ 7)\ (i\ 8)\ (8\ 5)\ (1\ 3)\ (3\ 9)$	
$(9\ 8)\ (2\ 5)\ (3\ 8)\ (1\ 8)\ (8\ 7)\ (5\ 7)\ (6\ i)$	
$(i\ 2)\ (3\ 7)\ (2\ 5)\ (1\ 6)\ (1\ 7)\ (3\ 9)\ (8\ 9)$	
$(i\ 5)\ (1\ 5)\ (9\ 8)\ (3\ 8)\ (6\ 2)\ (8\ 7)\ (2\ 4)\ (7\ 4)\ (1\ 4)$	

LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 10

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

$A = \begin{bmatrix} \overline{3} & \overline{1} \\ \overline{2} & \overline{5} \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_7^{2\times 2}$, geben Sie $x \in \{0, \ldots, 6\}$ an mit $\overline{x} = \det A$.	
Kreuzen Sie (1), (2) oder (3) an: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & a & a \\ 2 & 3 & b & b \\ 2 & 3 & 4 & c \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{4\times 4}$ (1) $(a-2)\cdot(b-3)\cdot(c-4)$ (2) $(a-4)\cdot(b-3)\cdot(c-2)$ (3) $(a-3)\cdot(b-2)\cdot(c-4)$	☐ (1) ☐ (2) ☐ (3)
Kreuzen Sie (1), (2) oder (3) an: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & a & a & a \\ -1 & -2 & b & b \\ -1 & -2 & -3 & c \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{4\times 4}$ (1) $(a+2)\cdot(b+1)\cdot(c+3)$ (2) $(a+1)\cdot(b+2)\cdot(c+3)$ (3) $(a+3)\cdot(b+2)\cdot(c+1)$	☐ (1) ☐ (2) ☐ (3)
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{4\times 4}$	
$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$	
$\begin{bmatrix} 2 & 9 & 0 & 0 \\ \pi & i & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ i & \pi^2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$	

$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{4\times 4}$	
$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 2 & 7 \\ 4 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$	
$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ \pi & 3 & i & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ i & 0 & \pi^2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$	

Aufgabe 2

Es sei K ein kommutativer Ring mit 1. Weiter sei $A = [a_{i,j}] \in K^{n\times n}$ und $s \in K$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen allgemein richtig sind.

Das Gleichungssystem über $\mathbb{Z}_6$ $$\begin{array}{ccccccc} \overline{3}x_1 & + & \overline{3}x_2 & + & \overline{2}x_3 & = & \overline{1} \\ \overline{3}x_1 & + & \overline{5}x_2 & + & \overline{5}x_3 & = & \overline{2} \\ \overline{2}x_1 & + & \overline{1}x_2 & + & \overline{1}x_3 & = & \overline{3} \end{array}$$ hat eine eindeutige Lösung (x_1, x_2, x_3) in $\mathbb{Z}_6^3$.	☐ Ja ☐ Nein
Es ist $\det(sA) = s \cdot \det A$.	☐ Ja ☐ Nein
Es ist $\det(sA) = s^n \cdot \det A$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $K = \mathbb{Q}$ und $\det(A^3) = 1$, so ist $\det A = 1$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $K = \mathbb{Q}$ und $\det(A^5) = 1$, so ist $\det A = 1$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $K = \mathbb{Q}$ und $\det A = 2$, so gibt es kein $B \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ mit $B^2 = A$.	☐ Ja ☐ Nein
Sind alle $a_{i,j} \in \{0, 1, -1\}$, so ist auch $\det A \in \{0, 1, -1\}$.	☐ Ja ☐ Nein

Sind alle $a_{i,j} \in \{0,1\}$, so ist auch $\det A \in \{0,1\}$.	☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 3	
Es seien $A, B, C, D \in \mathbb{Q}^{n\times n}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind.	
Es gilt stets $\det \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = (\det B)\cdot(\det C)$.	☐ Ja ☐ Nein
Es gilt stets $\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = (\det B)\cdot(\det C)$.	☐ Ja ☐ Nein
Es gilt stets $\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = (\det A)\cdot(\det D) - (\det B)\cdot(\det C)$.	☐ Ja ☐ Nein
Es gilt stets $\det(A\cdot B) = \det(B\cdot A)$.	☐ Ja ☐ Nein
Genau dann gilt $\det \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = (\det B)\cdot(\det C)$ für alle $B, C \in \mathbb{Q}^{n\times n}$, wenn n gerade ist.	☐ Ja ☐ Nein
Genau dann gilt $\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = (\det B)\cdot(\det C)$ für alle $A, B, C \in \mathbb{Q}^{n\times n}$, wenn n gerade ist.	☐ Ja ☐ Nein
Genau dann gilt für alle $A, B, C, D \in \mathbb{Q}^{n\times n}$, dass $$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = (\det A)\cdot(\det D) - (\det B)\cdot(\det C)$$ ist, wenn $n = 1$ ist.	☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 4	
Es sei $K[X]$ der Polynomring über dem Körper K in der Unbestimmten X; es seien $f, g \in K[X]$.	
$\mathbb{Z}_2[X]$ hat genau 4 Elemente.	☐ Ja ☐ Nein
$\mathbb{Z}_2[X]$ hat unendliche viele Elemente.	☐ Ja ☐ Nein
Es gilt $\mathrm{Grad}(f+g) = \mathrm{Grad}\ f + \mathrm{Grad}\ g$, falls $f, g \neq 0$.	☐ Ja ☐ Nein
Es gilt $\mathrm{Grad}(f\cdot g) = \mathrm{Grad}\ f \cdot \mathrm{Grad}\ g$, falls $f, g \neq 0$.	☐ Ja ☐ Nein
Es sei $f = X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}_5[X]$. Wie viele $\alpha \in \mathbb{Z}_5$ gibt es mit $f(\alpha) = 0$?	
Es sei $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}_5[X]$. Wie viele $\alpha \in \mathbb{Z}_5$ gibt es mit $f(\alpha) = 0$?	

LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 10

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Es sei $f = X^4 - 9 \in \mathbb{R}[X]$ und $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Berechnen Sie $B = f(A)$ und geben Sie $b_{2,1}$ an.	
Es sei $f = X^4 - 9 \in \mathbb{R}[X]$ und $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Berechnen Sie $B = f(A)$ und geben Sie $b_{1,1}$ an.	
Es sei $f = X^4 - 9 \in \mathbb{R}[X]$ und $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Berechnen Sie $B = f(A)$ und geben Sie $b_{1,2}$ an.	
Es sei $f = X^4 - 9 \in \mathbb{R}[X]$ und $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Berechnen Sie $B = f(A)$ und geben Sie $b_{2,2}$ an.	
Ist $f \in K[X]$ invertierbar, so ist Grad $f = 0$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $f \in K[X]$ invertierbar, so ist Grad $f = 1$.	☐ Ja ☐ Nein

LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 11

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Aufgabe 1

Es sei K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring über K in der Unbestimmten X.

Die Anzahl der Polynome $f \in \mathbb{Z}_2[X]$ vom Grad 4 ist	
Die Anzahl der Polynome $f \in \mathbb{Z}_3[X]$ vom Grad 4 ist	
Hat $A \in \mathbb{Z}_2^{n\times n}$ das Minimalpolynom X^2+X+1, so ist $A^6+A^5+A^3+A = 0 \in \mathbb{Z}_2^{n\times n}$.	☐ Ja ☐ Nein
Hat $A \in \mathbb{Z}_2^{n\times n}$ das Minimalpolynom X^2+X+1, so ist $A^6+A^5+A^3+A = A \in \mathbb{Z}_2^{n\times n}$.	☐ Ja ☐ Nein
Hat $A \in \mathbb{Z}_2^{n\times n}$ das Minimalpolynom X^2+X+1, so ist $A^6+A^5+A^3+A = E_n \in \mathbb{Z}_2^{n\times n}$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $f \in K[X]$ mit Grad $f = 1$, so hat f in K eine Nullstelle.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $f \in K[X]$ mit Grad $f \geq 1$, so hat f in K eine Nullstelle.	☐ Ja ☐ Nein
Ist Grad $f = n$, so gibt es höchstens n verschiedene Matrizen $A \in K^{2\times 2}$ mit $f(A) = 0 \in K^{2\times 2}$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist Grad $f = n$, so hat f genau n verschiedene Nullstellen.	☐ Ja ☐ Nein
Ist Grad $f = n$, so hat f höchstens n verschiedene Nullstellen.	☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 2

Es sei K ein Körper, $A \in K^{n\times n}$ und μ_A das Minimalpolynom von A.

Es gilt stets Grad $\mu_{A^2} \leq$ Grad μ_A.	☐ Ja ☐ Nein
Es gilt stets Grad $\mu_{A^3} \leq$ Grad μ_A.	☐ Ja ☐ Nein
Es sei $\alpha = 1 + \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ (betrachtet als $\mathbb{Q}$-Algebra, $\mu_\alpha \in \mathbb{Q}[X]$ das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$ mit $\mu_\alpha = \sum_{i=0}^n a_i X^i$. Dann ist $a_0 =$	
Es sei $\alpha = 1 + \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ (betrachtet als $\mathbb{Q}$-Algebra, $\mu_\alpha \in \mathbb{Q}[X]$ das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$ mit $\mu_\alpha = \sum_{i=0}^n a_i X^i$. Dann ist $a_1 =$	
Ist $A = 0$, dann ist Grad $\mu_A = 0$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist Grad $\mu_A = 1$, so ist $A = E_n$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $\mu_A(0) \neq 0$, so ist A invertierbar.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $\mu_A(0) \neq 0$, so ist $\det A \neq 0$.	☐ Ja ☐ Nein
Wie viele $A \in \mathbb{F}_{17}^{4\times 4}$ haben ein Minimalpolynom vom Grad 1?	

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Wie viele $A \in \mathbb{F}_{23}^{4\times 4}$ haben ein Minimalpolynom vom Grad 1?	

Aufgabe 3

Es sei $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i+j \text{ gerade,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und μ_A das Minimalpolynom.

Für $n = 100$ ist die Dimension des Eigenraums $E_A(t)$ zum größten Eigenwert t gleich	
Für $n = 101$ ist die Dimension des Eigenraums $E_A(t)$ zum kleinsten Eigenwert t gleich	
Für $n = 103$ ist die Dimension des Eigenraums $E_A(t)$ zum kleinsten Eigenwert t gleich	
Für $n = 105$ ist die Dimension des Eigenraums $E_A(t)$ zum kleinsten Eigenwert t gleich	
Für $n = 80$ ist die Dimension des Eigenraums $E_A(t)$ zum größten Eigenwert t gleich	
Für $n = 90$ ist die Dimension des Eigenraums $E_A(t)$ zum größten Eigenwert t gleich	
Für $n = 41$ ist der größte Eigenwert gleich	
Für $n = 43$ ist der größte Eigenwert gleich	
Für $n = 45$ ist der größte Eigenwert gleich	
Für $n = 50$ ist Grad μ_A gleich	
Für $n = 50$ ist der größte Eigenwert gleich	
Für $n = 52$ ist Grad μ_A gleich	
Für $n = 52$ ist der größte Eigenwert gleich	
Für $n = 54$ ist Grad μ_A gleich	
Für $n = 54$ ist der größte Eigenwert gleich	

Aufgabe 4

Es sei K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum ($1 \leq n < \infty$) und $\varphi \in \operatorname{End} V$.

φ hat mindestens einen Eigenwert.	☐ Ja ☐ Nein
Die Summe von zwei Eigenvektoren von φ ist stets auch ein Eigenvektor von φ.	☐ Ja ☐ Nein
Die Summe von zwei Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten ist kein Eigenvektor von φ.	☐ Ja ☐ Nein
Es gibt $a \in K$, das nicht Eigenwert irgendeines Endomorphismus von V ist.	☐ Ja ☐ Nein
Es gibt einen Vektor $v \in V$, der nicht Eigenvektor irgendeines Endomorphismus von V ist.	☐ Ja ☐ Nein
Ist 0 einziger Eigenwert von φ, so ist $\varphi = 0$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist 1 einziger Eigenwert von φ, so ist $\varphi = \mathrm{id}_V$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist φ nicht invertierbar, so hat φ mindestens einen Eigenwert.	☐ Ja ☐ Nein
Ist φ nicht invertierbar, so hat φ nur einen Eigenwert.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $\varphi^2 = \varphi$ und $\varphi \neq \mathrm{id}_V$, so hat φ genau zwei Eigenwerte.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $\varphi^3 = \varphi$ und $\varphi \neq \mathrm{id}_V$, so hat φ genau drei Eigenwerte.	☐ Ja ☐ Nein

LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 12

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Aufgabe 1

Es sei K ein Körper, $\varphi \in \operatorname{End} V$ für einen n-dimensionalen K-Vektorraum V und $A \in K^{n\times n}$ mit $n \geq 1$. Das charakteristische Polynom von φ bzw. A wird mit χ_φ bzw. χ_A bezeichnet, das Minimalpolynom mit μ_φ bzw. μ_A.

Gibt es eine Basisfolge $\mathcal{B}$ von V mit $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, so ist $\chi_\varphi = \chi_A$.	☐ Ja ☐ Nein
Hat χ_φ n paarweise verschiedene Nullstellen in K, so ist $\chi_\varphi = \mu_\varphi$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $\chi_\varphi = \chi_A$, so gibt es eine Basisfolge $\mathcal{B}$ in V mit $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $\chi_\varphi = \mu_\varphi$, so hat φ einen Eigenwert.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $\chi_\varphi(0) \neq 0$, so ist φ bijektiv.	☐ Ja ☐ Nein
Ist φ bijektiv, so ist $\chi_\varphi(0) \neq 0$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist die Summe der Koeffizienten von χ_φ gleich 0, so ist 1 Eigenwert von φ.	☐ Ja ☐ Nein
Ist die Summe der Koeffizienten von μ_φ gleich 0, so ist 1 Eigenwert von φ.	☐ Ja ☐ Nein
Jedes normierte Polynom vom Grad n über K ist charakteristisches Polynom eines Endomorphismus von V.	☐ Ja ☐ Nein
Jedes normierte Polynom vom Grad n über K ist Minimalpolynom eines Endomorphismus von V.	☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 2

Es sei K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring in der Unbestimmten X über K. Sind die folgenden Aussagen über Diagonalisierbarkeit von Matrizen richtig?

Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ $(n \geq 2)$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn ein n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ von Eigenvektoren von A mit $v_i \in K^{n\times 1}$ existiert, das linear unabhängig ist.	☐ Ja ☐ Nein
Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ $(n \geq 2)$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn $K^{n\times 1}$ eine Basisfolge aus Eigenvektoren von A hat.	☐ Ja ☐ Nein
Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn eine Diagonalmatrix $D \in K^{n\times n}$ und eine invertierbare Matrix $T \in K^{n\times n}$ existiert mit $TD = AT$.	☐ Ja ☐ Nein
Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn eine Diagonalmatrix $D \in K^{n\times n}$ und eine Matrix $T \in K^{n\times n}$ existiert mit $TD = AT$.	☐ Ja ☐ Nein
Hat ein normiertes Polynom $f \in K[X]$, dessen Grad mindestens 2 ist, paarweise verschiedene Koeffizienten, dann ist seine Begleitmatrix diagonalisierbar.	☐ Ja ☐ Nein

Jede Begleitmatrix eines normierten Polynoms $f \in K[X]$ vom Grad größer als 1 ist diagonalisierbar.	☐ Ja ☐ Nein
Jede Matrix $A \in K^{n\times n}$, für die $0 \cdot A = A$ gilt, ist diagonalisierbar.	☐ Ja ☐ Nein
Jede quadratische Matrix, deren Einträge alle gleich sind, ist diagonalisierbar.	☐ Ja ☐ Nein
Jede quadratische Nullmatrix ist diagonalisierbar.	☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 3

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$.

A und A^T haben die gleichen Eigenräume.	☐ Ja ☐ Nein
A und A^T haben die gleichen Eigenwerte.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3},$$ so ist $\chi_A =$ (a) X^3-2X^2+X (b) X^3+2X^2+X (c) X^3-2X^2+1	☐ (a) ☐ (b) ☐ (c)
Ist $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3},$$ so ist $\chi_A =$ (a) X^3+X (b) X^3-2X+1 (c) X^3-X	☐ (a) ☐ (b) ☐ (c)
Ist $K = \mathbb{C}$, dann gilt: Wenn $\chi_A \neq X^n$ ist, so ist $A^m \neq 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $K = \mathbb{C}$, dann gilt: Wenn $A^m = 0$ ist für ein $m \in \mathbb{N}$, so ist $\chi_A = X^n$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist s Eigenwert von A, so ist $\dim E_A(s) = n - \mathrm{Rang}(A - s \cdot E_n)$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist s Eigenwert von A, so ist $\dim E_A(s) = \mathrm{Rang}(A - s \cdot E_n)$.	☐ Ja ☐ Nein
Wie viele Matrizen $A \in \mathbb{Z}_2^{2\times 2}$ sind ähnlich zu $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$?	
Wie viele Matrizen $A \in \mathbb{Z}_2^{2\times 2}$ sind ähnlich zu $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$?	

Aufgabe 4

Es sei K ein Körper und V ein Vektorraum über K. Eine Bilinearform $\Phi : V \times V \to K$ heißt **nicht ausgeartet**, falls es zu jedem $v \in V \setminus \{0\}$ ein $w \in V$ gibt mit $\Phi(v,w) \neq 0$.	
Es sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ und $$\begin{array}{rcl} \Phi : V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \sum_{i=0}^{5} (f(i) + g(i)) \end{array}.$$ Ist Φ eine symmetrische Bilinearform?	☐ Ja ☐ Nein
Es sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ und $$\begin{array}{rcl} \Phi : V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \sum_{i=0}^{5} f(i)g(i) \end{array}.$$ Ist Φ eine symmetrische Bilinearform?	☐ Ja ☐ Nein
Gibt es auf $V = K^2$ eine nicht ausgeartete, symmetrische Bilinearform mit einem $0 \neq v \in V$ und $\Phi(v,v) = 0$?	☐ Ja ☐ Nein
Gibt es auf $W = \mathbb{R}^2$ eine nicht ausgeartete, symmetrische Bilinearform mit $\Phi(w,w) = 0$ für alle $w \in W$?	☐ Ja ☐ Nein
Gibt es injektive Bilinearformen?	☐ Ja ☐ Nein
Gibt es injektive Sesquilinearformen?	☐ Ja ☐ Nein
Ist $\dim V = n$, dann bilden die Bilinearformen auf V einen Vektorraum der Dimension $2n$.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $\dim V = n$, dann bilden die Bilinearformen auf V einen Vektorraum der Dimension n^2.	☐ Ja ☐ Nein
Ist $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform mit Gram-Matrix $M_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ bezüglich einer Basisfolge $\mathcal{B}$, so gibt es auch eine Basisfolge $\mathcal{B}'$ mit $M_{\mathcal{B}'}(\Phi) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.	☐ Ja ☐ Nein