

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 1

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

<b>Aufgabe 1</b>	
Kreuzen Sie jeweils "Ja" an, wenn die Aussage stimmt oder "Nein", wenn sie nicht stimmt!	
$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 + y^2 = 0\} \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y = 0\}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y = 0\} \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \cdot y = 0\}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist durch } 6 \text{ teilbar}\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist gerade}\}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist gerade}\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist durch } 3 \text{ teilbar}\}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Die Menge $\text{Pot}(\{1, \{2, 3\}, 3\})$ hat 16 Elemente.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Die Menge $\text{Pot}(\{1, \{2, 3\}, 3\})$ hat 8 Elemente.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Die Menge $\{(x, y) \in \{1, 2, 3\} \times \{2, 3\} \mid x \cdot y \text{ ist gerade}\}$ hat genau 3 Elemente.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Die Menge $\{(x, y) \in \{1, 2, 3\} \times \{2, 3\} \mid x \cdot y \text{ ist ungerade}\}$ hat genau 2 Elemente.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

<b>Aufgabe 2</b>	
Es seien $A, B$ und $C$ beliebige Mengen. Kreuzen Sie jeweils "Ja" an, wenn die Aussage stimmt oder "Nein", wenn sie nicht stimmt!	
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$(A \cap B) \cup C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 1

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Ist $A \subseteq B$ , dann ist $C \cap A \subseteq C \cap B$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $A \subseteq B$ , dann ist $C \cup A \subseteq C \cup B$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Wenn $A \cap B \subseteq C$ gilt, dann gilt sowohl $A \subseteq C$ als auch $B \subseteq C$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Wenn $A \cup B \subseteq C$ gilt, dann gilt sowohl $A \subseteq C$ als auch $B \subseteq C$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

## Aufgabe 3

Geben Sie jeweils die Anzahl der Abbildungen mit den beschriebenen Eigenschaften an.	
Anzahl der bijektiven Abbildungen von $\{1, 2, 3\}$ nach $\{1, 2, 3\}$ .	
Anzahl der bijektiven Abbildungen von $\{3, 2, 1\}$ nach $\{6, 5, 4\}$ .	
Anzahl der injektiven Abbildungen von $\emptyset$ nach $\{1, 2, 3\}$ .	
Anzahl der injektiven Abbildungen von $\{1, \{2, 3\}, 3\}$ nach $\{-1, -2, -3\}$ .	
Anzahl der injektiven Abbildungen von $\{\emptyset\}$ nach $\{1, 2, 3\}$ .	
Anzahl der injektiven Abbildungen von $\{1, 2, 3\}$ nach $\{4, 5\}$ .	
Anzahl der surjektiven Abbildungen von $\{-3, -2, -1\}$ nach $\{1, \{2, 3\}, 3\}$ .	
Anzahl der surjektiven Abbildungen von $\{1, 2, 3\}$ nach $\emptyset$ .	
Anzahl der surjektiven Abbildungen von $\{1, 2, 3\}$ nach $\{\emptyset\}$ .	
Anzahl der surjektiven Abbildungen von $\{1, 2\}$ nach $\{3, 4, 5\}$ .	

## Aufgabe 4

Kreuzen Sie jeweils "Ja" an, wenn die Aussage stimmt oder "Nein", wenn sie nicht stimmt!	
$F : \{\{x, y\} \mid x, y \in \mathbb{Z}, x \neq y\} \rightarrow \mathbb{Z}, \{x, y\} \mapsto x^2 - y$ ist eine surjektive Abbildung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$F : \{\{x, y\} \mid x, y \in \mathbb{Z}, x \neq y\} \rightarrow \mathbb{Z}, \{x, y\} \mapsto x^2 + y$ ist eine surjektive Abbildung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, (x, y) \mapsto (x^2 + y^2, x - y)$ ist eine injektive Abbildung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, (x, y) \mapsto (x^2, x - y)$ ist eine injektive Abbildung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 1

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

$f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, x \mapsto (x, x + 1)$ ist eine surjektive Abbildung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, x \mapsto (x, x - 1)$ ist eine surjektive Abbildung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x^2 + 2y$ ist eine surjektive Abbildung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x^2 + 2y^2$ ist eine surjektive Abbildung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \mapsto (x, x^3)$ ist eine surjektive Abbildung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \mapsto (x^2, x^3)$ ist eine surjektive Abbildung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 2

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

<b>Aufgabe 1</b>	
Es seien $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ beliebige Abbildungen zwischen den Mengen $A$ , $B$ und $C$ . Sind die folgenden Aussagen für alle solchen Abbildungen richtig?	
Ist $A = C$ und $g \circ f = \text{id}_A$ , so ist $f$ bijektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $A = C$ und $g \circ f = \text{id}_A$ , so ist $f$ injektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $A = C$ und $g \circ f = \text{id}_A$ , so ist $f$ surjektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $A = C$ und $g \circ f = \text{id}_A$ , so ist $g$ bijektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $A = C$ und $g \circ f = \text{id}_A$ , so ist $g$ injektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $A = C$ und $g \circ f = \text{id}_A$ , so ist $g$ surjektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $g \circ f$ injektiv, so ist $f$ injektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $g \circ f$ injektiv, so ist $g$ injektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist $f$ surjektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist $g$ surjektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Sind $f$ und $g$ injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Sind $f$ und $g$ surjektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

<b>Aufgabe 2</b>	
Gelten die folgenden Aussagen für alle Abbildungen $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ und $g : \mathbb{Q} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ ?	
$f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$g$ ist nicht injektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$g$ ist nicht injektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$g$ ist surjektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$g(\mathbb{Q}) = \{1, 2, 3\}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$g(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 2

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

$g(\{1, 2, 3\}) = \{1, 2, 3\}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$f^{-1}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$f^{-1}(\mathbb{Q}) \neq \mathbb{Z}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$f^{-1}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$f^{-1}(\mathbb{Z}) \neq \mathbb{Z}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$g^{-1}(\{1, 2, 3\}) = \mathbb{Q}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$g^{-1}(\{1, 2, 3\}) \neq \mathbb{Q}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Besitzt jede Faser von $f$ genau ein Element, so ist $f$ bijektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Besitzt jede Faser von $f$ mindestens ein Element, so ist $f$ bijektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist keine Faser von $g$ leer, so ist $g$ injektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist keine Faser von $g$ leer, so ist $g$ surjektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

## Aufgabe 3

Welcher der folgenden Mengen sind Äquivalenzrelationen auf  $\mathbb{Z}$ ?

$\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a + b = 0\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a + b = 1\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a, b \geq 0\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a^2 - b^2 = 0\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 17 \text{ teilt } a - b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 2 \text{ teilt } a + b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 3 \text{ teilt } a + b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 2

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

$\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 7 \text{ teilt } a + b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 7 \text{ teilt } a - b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a + b \text{ ist nicht durch } 7 \text{ teilbar}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a + b \text{ ist ungerade}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

## Aufgabe 4

Es sei  $K$  ein beliebiger Körper. Kreuzen Sie bei den folgenden Fragen "Ja" nur an, wenn die Aussage für jeden Körper  $K$  gilt. Wenn es auch nur einen Körper gibt, für den die Aussage nicht gilt, müssen Sie "Nein" ankreuzen.

Die Abbildung $K \rightarrow K, x \mapsto x + x$ ist bijektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Die Abbildung $K \rightarrow K, x \mapsto x + x + x$ ist bijektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Die Gleichung $x \cdot a + x = -1$ hat für jedes $a$ eine Lösung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Die Gleichung $x \cdot a + x = 0$ hat für jedes $a$ eine Lösung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Für jedes $a \in K$ ist die Abbildung $K \rightarrow K, x \mapsto a + x$ bijektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Für jedes $a \in K$ ist die Abbildung $K \rightarrow K, x \mapsto ax$ bijektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Für jedes $a \in K$ mit $a \neq 0$ ist die Abbildung $K \rightarrow K, x \mapsto ax$ bijektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $a \in K$ und $a^2 = 1$ , so folgt $a = 1$ oder $a = -1$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $a^{-1} = a$ , so ist $a = 1$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Sind $a, b \in K$ mit $a^2 - ab - ba + b^2 = 0$ , so ist $a = b$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Sind $a, b \in K$ und $(a - b)^2 = 0$ , so ist $a = b$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 3

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

<b>Aufgabe 1</b>	
Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Dabei sei $R$ stets ein kommutativer Ring mit Eins.	
$R$ ist genau dann ein Körper, wenn es keine $a, b \in R \setminus \{0\}$ gibt mit $a \cdot b = 0$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$\mathbb{Z}_m$ ist für $m \geq 2$ genau dann ein Körper, wenn es keine $a, b \in \mathbb{Z}_m \setminus \{0\}$ gibt mit $a \cdot b = 0$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Die Abbildung $\mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5, x \mapsto x^3$ ist surjektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Die Abbildung $\mathbb{Z}_7 \rightarrow \mathbb{Z}_7, x \mapsto x^3$ ist surjektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $K$ ein Körper und $K \rightarrow K, x \mapsto x^2$ injektiv, so ist $1 + 1 = 0$ in $K$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $K$ ein Körper und $K \rightarrow K, x \mapsto x^3$ injektiv, so ist $1 + 1 + 1 = 0$ in $K$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist für $a \in R$ die Abbildung $R \rightarrow R, x \mapsto ax$ injektiv, so ist $a$ invertierbar.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist für $a \in R$ die Abbildung $R \rightarrow R, x \mapsto ax$ surjektiv, so ist $a$ invertierbar.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist für jedes $a \in R \setminus \{0\}$ die Abbildung $R \rightarrow R, x \mapsto a(x+1)$ surjektiv, so ist $R$ ein Körper.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist für jedes $a \in R \setminus \{0\}$ die Abbildung $R \rightarrow R, x \mapsto ax + 1$ surjektiv, so ist $R$ ein Körper.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

<b>Aufgabe 2</b>	
Wir rechnen in $\mathbb{Z}_m$ und schreiben $\bar{a} := R_m(a) = a + m\mathbb{Z}$ für $a \in \mathbb{Z}$ . Beantworten Sie die folgenden Fragen, indem Sie das richtige Ergebnis ankreuzen bzw. eingeben.	
Es sei $m = 101$ ; dann ist $\bar{2}^{100}$ gleich (a) $\bar{24}$ (b) $\bar{2}$ (c) $\bar{1}$	<input type="checkbox"/> (a) <input type="checkbox"/> (b) <input type="checkbox"/> (c)
Es sei $m = 101$ ; dann ist $\bar{2}^{101}$ gleich (a) $\bar{48}$ (b) $\bar{2}$ (c) $\bar{1}$	<input type="checkbox"/> (a) <input type="checkbox"/> (b) <input type="checkbox"/> (c)
Es sei $m = 17$ ; dann ist $\bar{5}^{-1}$ gleich (a) $\bar{5}$ (b) $\bar{7}$ (c) $\bar{12}$	<input type="checkbox"/> (a) <input type="checkbox"/> (b) <input type="checkbox"/> (c)
Es sei $m = 17$ ; dann ist $\bar{7} \cdot \bar{4} + \bar{3}$ gleich (a) $\bar{14}$ (b) $\bar{12}$ (c) $\bar{3}$	<input type="checkbox"/> (a) <input type="checkbox"/> (b) <input type="checkbox"/> (c)
Es sei $m = 17$ ; dann ist $\bar{7} \cdot \bar{4} + \bar{3}$ gleich (a) $\bar{13}$ (b) $\bar{14}$ (c) $\bar{2}$	<input type="checkbox"/> (a) <input type="checkbox"/> (b) <input type="checkbox"/> (c)

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 3

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Es sei $m = 17$ ; dann ist $\bar{7}^{-1}$ gleich (a) $\bar{5}$ (b) $\bar{7}$ (c) $\bar{11}$	<input type="checkbox"/> (a) <input type="checkbox"/> (b) <input type="checkbox"/> (c)
Was ist die letzte Dezimalziffer von $3^{100810}$ ?	
Was ist die letzte Dezimalziffer von $3^{120409}$ ?	
Wieviele invertierbare Elemente gibt es in $\mathbb{Z}_6$ ?	
Wieviele invertierbare Elemente gibt es in $\mathbb{Z}_8$ ?	

## Aufgabe 3

$\mathbb{C}$ sei der Körper aus Blatt 2 Aufgabe 6. Für einige Teilaufgaben betten wir ein: $\mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{C} \mid y = 0\}$ . Sind die folgenden Aussagen richtig?	
Die Gleichung $x^2 = a$ hat für jedes $0 \neq a \in \mathbb{C}$ genau 2 Lösungen in $\mathbb{C}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Die Gleichung $x^2 = a$ hat für jedes $a \in \mathbb{C}$ genau 2 Lösungen in $\mathbb{C}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Es gibt einen Körper, in dem die Gleichung $x^2 = -1$ genau 2 Lösungen hat.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Es gibt einen Körper, in dem die Gleichung $x^2 = -1$ keine Lösung hat.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , so ist $a + a^{-1} \in \mathbb{R}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , so ist $a^{-1} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist in einem Ring mit 1 ein Element $a$ invertierbar, dann ist auch $a^3$ invertierbar.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist in einem Ring mit 1 ein Element $a$ invertierbar, dann ist auch $a^2$ invertierbar.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Sind $a, b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , so ist $a + b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Sind $a, b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , so ist $a \cdot b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

## Aufgabe 4

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 3

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem mit $a_{ij} \in \mathbb{Q}$ :	
$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = 0$ $a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = 0$ $\vdots$ $a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = 0$	
Wenn $(b_1, \dots, b_n)$ eine Lösung ist und $c \in \mathbb{Q}$ , dann ist auch $(c b_1, \dots, c b_n)$ eine Lösung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Wenn $(b_1, \dots, b_n)$ eine Lösung ist, ist $(b_1 + 1, \dots, b_n + 1)$ keine Lösung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Wenn $(b_1, \dots, b_n)$ eine Lösung ist, ist $(b_1 + 1, \dots, b_n + n)$ keine Lösung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Wenn $(b_1, \dots, b_n)$ eine Lösung ist, ist $(b_1 - 1, \dots, b_n - 1)$ keine Lösung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Wenn $(b_1, \dots, b_n)$ eine Lösung ist, ist $(b_1 - 1, \dots, b_n - n)$ keine Lösung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Wenn $(b_1, \dots, b_n)$ eine Lösung ist, ist auch $(b_1 + 1, \dots, b_n + 1)$ eine Lösung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Wenn $(b_1, \dots, b_n)$ eine Lösung ist, ist auch $(b_1 + 1, \dots, b_n + n)$ eine Lösung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Wenn $(b_1, \dots, b_n)$ eine Lösung ist, ist auch $(b_1 - 1, \dots, b_n - 1)$ eine Lösung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Wenn $(b_1, \dots, b_n)$ eine Lösung ist, ist auch $(b_1 - 1, \dots, b_n - n)$ eine Lösung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Wenn $(b_1, \dots, b_n)$ und $(c_1, \dots, c_n)$ Lösungen sind, ist auch $(b_1 + c_1, \dots, b_n + c_n)$ eine Lösung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Wenn $(b_1, \dots, b_n)$ und $(c_1, \dots, c_n)$ Lösungen sind, ist auch $(b_1 - c_1, \dots, b_n - c_n)$ eine Lösung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Wenn $(b_1, \dots, b_n)$ und $(c_1, \dots, c_n)$ Lösungen sind, ist auch $(b_1 - c_1, \dots, b_n - c_n)$ eine Lösung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Wenn $m > n$ ist, hat das System keine Lösung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Wenn $m = n$ ist, hat das System genau eine Lösung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Wenn $m = n - 1$ ist, hat das System genau eine Lösung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Wenn es eine von der Nulllösung $\underline{0}$ verschiedene Lösung gibt, gibt es auch eine von $\underline{0}$ verschiedene ganzzahlige Lösung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Wenn es eine von der Nulllösung $\underline{0}$ verschiedene Lösung gibt, gibt es auch eine von $\underline{0}$ verschiedene Lösung, die nicht ganzzahlig ist.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 4

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

## Aufgabe 1

Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper  $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$  mit 2 Elementen:

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 & & + & x_3 & & + & x_5 & + & x_6 & = & 0 \\ & x_2 & + & ax_3 & + & x_4 & + & x_5 & & = & 1 \\ x_1 & & & & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & 1 \quad (*) \\ & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & + & x_6 & = & 1 \end{array}$$

Hier ist  $a$  eine Zahl aus  $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}_2$ , die jeweils unten angegeben ist.

$(1, 1, 0, 0, 1, 0)$ ist für $a = 1$ eine Lösung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ist für $a = 0$ eine Lösung.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Das Gleichungssystem ist homogen.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Das Gleichungssystem ist inhomogen.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Für $a = 0$ erfüllt jede Lösung die Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Für $a = 0$ gibt es keine Lösung $(x_1, \dots, x_6)$ mit $x_1 = x_5 = x_6 = 0$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Für $a = 1$ erfüllt jede Lösung die Gleichung $x_1 + x_3 + x_4 + x_6 = 1$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Für $a = 1$ gibt es keine Lösung $(x_1, \dots, x_6)$ mit $x_1 = x_5 = x_6 = 0$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Wieviele Lösungen hat das Gleichungssystem für $a = 0$ ?	
Wieviele Lösungen hat das Gleichungssystem für $a = 1$ ?	

## Aufgabe 2

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume in den jeweils angegebenen  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen?

$U := \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 4} \mid a_{11} + a_{12} = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{3 \times 4}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$U := \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 4} \mid a_{11} + a_{12} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{3 \times 4}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$U := \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{4 \times 3} \mid a_{11} \cdot a_{22} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{4 \times 3}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$U := \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{4 \times 3} \mid a_{11}^2 + a_{22}^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{4 \times 3}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 4

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhoffer

$U := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \text{ ist invertierbar}\} \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$U := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A = A^2\} \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$U := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid x \leq y \implies f(x) \leq f(y)\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$U := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \text{es gibt } c \in \mathbb{R} \text{ mit } f(x) \leq c \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$U_c := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) \leq c \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ mit } c \in \mathbb{R}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

## Aufgabe 3

Mit  $E_n$  sei jeweils die  $n$ -reihige Einheitsmatrix bezeichnet und mit  $0_n$  die  $n$ -reihige Nullmatrix. Sind die folgenden Aussagen über Matrizen richtig?

Ist $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = E_3$ und $n > 1$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = E_3$ und $n > 1$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $A \in \mathbb{R}^{100 \times 100}$ mit $A^6 = E_{100}$ und $A^{10} = E_{100}$ , dann ist auch $A^2 = E_{100}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $A \in \mathbb{R}^{100 \times 100}$ mit $A^6 = E_{100}$ und $A^{14} = E_{100}$ , dann ist auch $A^2 = E_{100}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $A^2 = 0_2$ , so ist $A = 0_2$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $A^2 = E_2$ , so ist $A = \pm E_2$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und gilt $A \cdot B \cdot A = A$ , so ist $A \cdot B = E_m$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und gilt $A \cdot B \cdot A = A$ , so ist $B \cdot A = E_n$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und gilt $B \cdot A = E_n$ , so ist $A \cdot B = E_m$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und gilt $A \cdot B = E_m$ , so ist $B \cdot A = E_n$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

## Aufgabe 4

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 4

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Betrachten Sie die folgenden Matrizen mit reellen Koeffizienten.  $A := \begin{bmatrix} 14 & -13 \\ 1 & -19 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ,  $B := \begin{bmatrix} 14 & -13 & 2 \\ 1 & -19 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $C := \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 9 & 12 & -24 \end{bmatrix}$ ,  $D := \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$ . Entscheiden Sie für jeden der folgenden Ausdrücke, ob er sinnvoll ist und eine Matrix  $X = [x_{ij}]$  definiert. Falls nein, kreuzen Sie Q an (für Quatsch) und sonst kreuzen sie den Eintrag  $x_{11}$  an.

$X = 4AB - 183C$	<input type="checkbox"/> Q <input type="checkbox"/> 0 <input type="checkbox"/> 1
$X = 7BA - 193D^2$	<input type="checkbox"/> Q <input type="checkbox"/> 0 <input type="checkbox"/> 1
$X = ABA - 170A$	<input type="checkbox"/> Q <input type="checkbox"/> 180 <input type="checkbox"/> 62
$X = ADB - 4C^2$	<input type="checkbox"/> Q <input type="checkbox"/> 79 <input type="checkbox"/> 18
$X = CAC$	<input type="checkbox"/> Q <input type="checkbox"/> -97 <input type="checkbox"/> 188
$X = CAD + A$	<input type="checkbox"/> Q <input type="checkbox"/> 180 <input type="checkbox"/> 62
$X = C^3A - D$	<input type="checkbox"/> Q <input type="checkbox"/> 326 <input type="checkbox"/> 388
$X = DBA - D^3$	<input type="checkbox"/> Q <input type="checkbox"/> 79 <input type="checkbox"/> 18
$X = DBD$	<input type="checkbox"/> Q <input type="checkbox"/> -97 <input type="checkbox"/> 188
$X = D^3B - C$	<input type="checkbox"/> Q <input type="checkbox"/> 326 <input type="checkbox"/> 388

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 5

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

<b>Aufgabe 1</b>		
Es seien $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 1}$ . Beantworten Sie die folgenden Fragen durch Angabe einer ganzen Zahl.		
Für welches $s \in \mathbb{Q}$ ist	$\begin{bmatrix} s \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$	keine Basis von $\mathbb{Q}^{3 \times 1}$ ?
Für welches $s \in \mathbb{Q}$ ist	$\begin{bmatrix} s \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$	keine Basis von $\mathbb{Q}^{3 \times 1}$ ?
Für welches $s \in \mathbb{Q}$ ist	$\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ s \end{bmatrix}$	eine Linearkombination von $(v, w)$ ?
Für welches $s \in \mathbb{Q}$ ist	$\begin{bmatrix} 6 \\ s \\ 12 \end{bmatrix}$	$\in \langle v, w \rangle$ ?
Für welches $s \in \mathbb{Q}$ ist	$\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ s \end{bmatrix}$	ein Linearkombination von $(v, w)$ ?
Für welches $s \in \mathbb{Q}$ ist	$\begin{bmatrix} 0 \\ s \\ -12 \end{bmatrix}$	$\in \langle v, w \rangle$ ?
Für welches $s \in \mathbb{Q}$ liegt	$\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ s \end{bmatrix}$	im Erzeugnis von $\{v, w\}$ ?
Für welches $s \in \mathbb{Q}$ liegt	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ s \end{bmatrix}$	im Erzeugnis von $\{v, w\}$ ?
Ist $s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$	mit $s, t \in \mathbb{Q}$ , was ist dann $s - t$ ?	
Ist $s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	mit $s, t \in \mathbb{Q}$ , was ist dann $s - t$ ?	

<b>Aufgabe 2</b>	
Es sei $V := \mathbb{R}^{1 \times 3} = \{[a, b, c] \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller $1 \times 3$ -Matrizen über $\mathbb{R}$ , und es seien in $V$ die Vektoren $v_1 = [2, 1, 3]$ , $v_2 = [1, 0, 2]$ , $v_3 = [3, 2, 4]$ und $v_4 = [1, 2, 3]$ gegeben. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
Das Erzeugnis $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ist ganz $V$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 5

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Das Erzeugnis $\langle v_2, v_4, v_1 \rangle$ ist ganz $V$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Das Erzeugnis $\langle v_3, v_4, v_2 \rangle$ ist ganz $V$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Das Erzeugnis $\langle v_4, v_2, v_4 \rangle$ ist ganz $V$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Der Vektor $[1, 0, 1]$ aus $V$ liegt im Erzeugnis $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Der Vektor $[1, 1, 0]$ aus $V$ liegt im Erzeugnis $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Der Vektor $[1, 1, 1]$ aus $V$ liegt im Erzeugnis $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Die Erzeugnisse $\langle v_1, v_2 \rangle$ und $\langle v_1, v_3 \rangle$ sind gleich.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Die Erzeugnisse $\langle v_1, v_2 \rangle$ und $\langle v_1, v_4 \rangle$ sind gleich.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Die Erzeugnisse $\langle v_1, v_2 \rangle$ und $\langle v_3, v_4 \rangle$ sind gleich.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Die Erzeugnisse $\langle v_1, v_3 \rangle$ und $\langle v_1, v_4 \rangle$ sind gleich.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Die Erzeugnisse $\langle v_1, v_3 \rangle$ und $\langle v_2, v_3 \rangle$ sind gleich.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Für alle $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt $\langle v_i, v_j \rangle = \{a \cdot v_i + b \cdot v_j \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Für alle $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt $\langle v_i, v_j \rangle = \{a \cdot v_i + a \cdot v_j \mid a \in \mathbb{R}\}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Für alle $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt $\langle v_i, v_j \rangle = \{a \cdot v_i + b \cdot v_j \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Für alle $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt $\langle v_i, v_j \rangle = \{a \cdot v_i + b \cdot v_j \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Für alle $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt: Das Erzeugnis $\langle v_i, v_i, v_j \rangle$ ist ein Teilraum von $\langle v_i, v_j \rangle$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Für alle $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt: Das Erzeugnis $\langle v_i, v_k \rangle$ ist ein Teilraum von $\langle v_i, v_j, v_k \rangle$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Für alle $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt: Das Erzeugnis $\langle v_i, v_j, v_k \rangle$ ist ein Teilraum von $\langle v_i, v_j \rangle$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Für alle $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt: Das Erzeugnis $\langle v_i, v_j, v_k \rangle$ ist ein Teilraum von $\langle v_j, v_i, v_k \rangle$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

## Aufgabe 3

Sind die folgenden Teilmengen (bzw. Folgen) der angegebenen  $\mathbb{R}$ -Vektorräume linear unabhängig?

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 5

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

$((2, 0, 0), (1, 3, 3), (3, 5, 3))$ in $\mathbb{R}^3$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$((2, 0, 0), (1, 3, 3), (3, 5, 5))$ in $\mathbb{R}^3$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$((2, 0, 2), (1, 3, 4), (3, 5, -2))$ in $\mathbb{R}^3$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$((2, 0, 2), (1, 3, 4), (3, 5, 8))$ in $\mathbb{R}^3$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$\{(1, 1), (1, -1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$\{(2, 1), (1, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$\{f_1, f_2, f_3\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ , wobei $f_i(x) = x^i$ ist ( $i = 1, 2, 3$ ).	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$\{f_1, f_2, f_3\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ , wobei $f_i(x) = x^i + i$ ist ( $i = 1, 2, 3$ ).	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$\{e\} \cup \{e_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , wobei $e(j) = 1$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und $e_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{für } j = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

## Aufgabe 4

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $X \subseteq Y \subseteq V$ . Dann gilt:

Es ist $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $X \neq Y$ , so ist $\langle X \rangle \neq \langle Y \rangle$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $X$ Basismenge von $V$ , so auch $Y$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $X$ ein Teilraum, so ist $\langle X \rangle = X$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $X$ Erzeugendensystem von $V$ , so auch $Y$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $X$ linear abhängig, dann ist auch $Y$ linear abhängig.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $X$ linear unabhängig, dann ist auch $Y$ linear unabhängig.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $Y$ ein Teilraum, so ist $\langle X \rangle \subseteq Y$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 5

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhoffer

Ist $Y$ linear abhängig, so ist auch $X$ linear abhängig.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $Y$ linear unabhängig, so ist auch $X$ linear unabhängig.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 6

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhoffer

<b>Aufgabe 1</b>	
Es sei $V$ ein Vektorraum über einem Körper $K$ und $U$ und $W$ Teilräume von $V$ mit $V = U + W$ . Weiter seien $X = \{u_1, \dots, u_m\} \subseteq U$ eine $m$ -elementige und $Y = \{w_1, \dots, w_n\} \subseteq W$ eine $n$ -elementige Teilmenge.	
Ist $(u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n)$ Basisfolge von $V$ , so ist $X$ Basis von $U$ und $Y$ Basis von $W$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $U \cap W = \{0\}$ und $X$ Basis von $U$ und $Y$ Basis von $W$ , so ist $X \cup Y$ Basis von $V$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $U \cap W = \{0\}$ und sind $X$ und $Y$ linear unabhängig, so ist auch $X \cup Y$ linear unabhängig.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $X \cup Y$ Basis von $V$ , so ist $X$ Basis von $U$ und $Y$ Basis von $W$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $X$ Basis von $U$ und $Y$ Basis von $W$ , so ist $X \cup Y$ Basis von $V$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $\dim U =  X  = m$ und $\dim W =  Y  = n$ , so ist $\dim V \geq m + n$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $\dim V = m + n$ und $\langle X \rangle = U$ und $\langle Y \rangle = W$ , so ist $X \cup Y$ Basis von $V$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $\langle X \cup Y \rangle = V$ , so ist $\langle X \rangle = U$ und $\langle Y \rangle = W$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $\langle X \rangle = U$ und $\langle Y \rangle = W$ , so ist $\langle X \cup Y \rangle = V$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

<b>Aufgabe 2</b>	
Es seien $K$ ein Körper, $v = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ und $w = (y_1, \dots, y_n) \in K^n$ . Ferner sei $f_i : K \rightarrow K, x \mapsto x^i$ und $g_i : K \rightarrow K, x \mapsto x^i + 1$ für $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . (Beachten Sie, dass hier $x^0 = 1$ für alle $x \in K$ ist.)	
$(v, w)$ ist genau dann linear abhängig, wenn $x_i y_j = x_j y_i$ für alle $i$ und $j$ mit $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq n$ gilt.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$(v, w)$ ist genau dann linear unabhängig, wenn es $i$ und $j$ gibt mit $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq n$ , für die $x_i y_j \neq x_j y_i$ gilt.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Für $K = \mathbb{F}_2$ ist $\{f_0, f_1\}$ Basis von $\mathbb{F}_2^{\mathbb{F}_2}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Für $K = \mathbb{F}_2$ ist $\{f_0, f_1, f_2\}$ Basis von $\mathbb{F}_2^{\mathbb{F}_2}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Für $K = \mathbb{F}_2$ ist $\{g_0, g_1\}$ Basis von $\mathbb{F}_2^{\mathbb{F}_2}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Für $K = \mathbb{F}_2$ ist $\{g_0, g_1, g_2\}$ Basis von $\mathbb{F}_2^{\mathbb{F}_2}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $K = \mathbb{Q}$ und $x_i = i$ und $y_i = -i + 1$ (jeweils für $1 \leq i \leq n$ ), so ist $(v, w)$ linear unabhängig.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $K = \mathbb{Q}$ und $x_i = i$ und $y_i = -i + 1$ (jeweils für $1 \leq i \leq n$ ), so ist $(v, w)$ linear abhängig.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 6

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Ist $w \neq s \cdot v$ für alle $s \in K$ , so ist $(v, w)$ linear unabhängig.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $\langle v, w \rangle = K^n$ , so ist $n \leq 2$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

## Aufgabe 3

Es sei  $K$  ein Körper und  $A$  die folgende Matrix:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}.$$

Berechnen Sie die folgenden Dimensionen:

$\dim SR(A)$ mit $A$ wie oben.	
$\dim U$ mit $U = \langle (0, 1, 2, 3), (1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5), (3, 4, 5, 6) \rangle \leq \mathbb{R}^4$ .	
$\dim U$ mit $U = \langle (1, 2, 3, 0), (0, 1, 2, 3), (3, 0, 1, 2), (2, 3, 0, 1) \rangle \leq \mathbb{R}^4$ .	
$\dim ZR(A)$ mit $A$ wie oben.	
$\dim \langle f_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ mit $f_n : i \mapsto 1 + ni$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .	
$\dim \langle f_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ mit $f_n : i \mapsto n \cdot i - 1$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .	
$\dim \{[a_{i,j}] \in K^{3 \times 3} \mid a_{i,j} - a_{j,i} = 0 \text{ für } i, j \in \{1, 2, 3\}\}$ .	
$\dim \{[a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid a_{i,j} + a_{j,i} = 0 \text{ für } i, j \in \{1, 2, 3\}\}$ .	
$\dim \{x \in \mathbb{Q}^{1 \times 3} \mid x \cdot A = \underline{0}\}$ mit $A$ wie oben.	
$\dim \{x \in \mathbb{Q}^{3 \times 1} \mid A \cdot x = \underline{0}\}$ mit $A$ wie oben.	

## Aufgabe 4

Es seien  $K$  ein Körper,  $V$  und  $W$  endlich-erzeugte Vektorräume über  $K$  und  $\varphi : V \rightarrow W$  eine  $K$ -lineare Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

Ist $(b_1, b_2, b_3)$ eine Basisfolge von $V$ und $\varphi$ surjektiv, dann ist $(\varphi(b_1), \varphi(b_2), \varphi(b_3))$ eine Basisfolge von $W$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $(b_1, b_2, b_3)$ eine Basisfolge von $V$ , dann ist $(\varphi(b_1), \varphi(b_2), \varphi(b_3))$ eine Basisfolge von $W$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Sind $b_1$ und $b_2$ in $V$ und ist $(\varphi(b_1), \varphi(b_2))$ linear unabhängig, dann ist $(b_1, b_2)$ linear unabhängig.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 6

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Sind $b_1$ und $b_2$ in $V$ und ist $(\varphi(b_1), \varphi(b_2))$ linear abhängig, dann ist $(b_1, b_2)$ linear abhängig.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Sind $b_1$ und $b_2$ in $V$ und ist $(b_1, b_2)$ linear unabhängig und $\varphi$ injektiv, dann ist $(\varphi(b_1), \varphi(b_2))$ linear unabhängig.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Sind $b_1$ und $b_2$ in $V$ und ist $(b_1, b_2)$ linear unabhängig und $\varphi$ surjektiv, dann ist $(\varphi(b_1), \varphi(b_2))$ linear unabhängig.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Wenn $\varphi$ injektiv ist, dann ist $\dim V \leq \dim W$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Wenn $\varphi$ surjektiv ist, dann ist $\dim V \leq \dim W$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Wenn es eine Basisfolge $(b_1, \dots, b_n)$ von $V$ gibt, so dass $(\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n))$ eine Basisfolge von $W$ ist, dann ist $\varphi$ ein Isomorphismus.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Wenn für jede Basisfolge $(b_1, \dots, b_n)$ von $V$ gilt, dass $(\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n))$ eine Basisfolge von $W$ ist, dann ist $\varphi$ ein Isomorphismus.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 7

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

<b>Aufgabe 1</b>	
Entscheiden Sie jeweils, ob die unten definierten Abbildungen $\varphi : V \rightarrow W$ $K$ -linear sind.	
$K$ beliebiger Körper, $V = K^{3 \times 2}$ , $W = K^{2 \times 2}$ , $\varphi : X \mapsto A \cdot X$ für festes $A \in K^{2 \times 3}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$K$ beliebiger Körper, $V = K^{3 \times 2}$ , $W = K^{3 \times 3}$ , $\varphi : X \mapsto X \cdot A$ für festes $A \in K^{2 \times 3}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$K = \mathbb{F}_2$ , $V = W = \mathbb{F}_2$ , $\varphi : x \mapsto x + x^2$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$K = \mathbb{F}_2$ , $V = W = \mathbb{F}_2$ , $\varphi : x \mapsto x^2$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$K = \mathbb{Q}$ , $V = W = \mathbb{Q}$ , $\varphi : x \mapsto 3x$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$K = \mathbb{Q}$ , $V = W = \mathbb{Q}$ , $\varphi : x \mapsto x + 1$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$K = \mathbb{R}$ , $V = W = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ , $\varphi(f) : x \mapsto f(x + 1) + x$ für $f \in V$ , $x \in K$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$K = \mathbb{R}$ , $V = W = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ , $\varphi(f) : x \mapsto xf(x^2 - 1)$ für $f \in V$ , $x \in K$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$K = \mathbb{R}$ , $V = W = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ , $\varphi(f) : x \mapsto x^2f(x^2 + 1)$ für $f \in V$ , $x \in K$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$K = \mathbb{R}$ , $V = \mathbb{R}^3$ , $W = \mathbb{R}$ , $\varphi : (x_1, x_2, x_3) \mapsto 1 + 2x_2 + 3x_3$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$K = \mathbb{R}$ , $V = \mathbb{R}^3$ , $W = \mathbb{R}$ , $\varphi : (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 + x_2$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

<b>Aufgabe 2</b>	
Es sei $K$ ein Körper. Beantworten Sie die folgenden Fragen:	
Es sei $V = \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\} \subseteq K^n$ . Gibt es eine surjektive, lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow K^{n-1}$ ?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Es sei $V = \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\} \subseteq K^n$ . Gibt es eine surjektive, lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow K^n$ ?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Es sei $\varphi : K^3 \rightarrow K^2$ ein Epimorphismus. Gibt es eine lineare Abbildung $\psi : K^2 \rightarrow K^3$ , so dass $\psi \circ \varphi$ ein Isomorphismus ist?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Es sei $\varphi : K^3 \rightarrow K^2$ ein Epimorphismus. Gibt es eine lineare Abbildung $\psi : K^2 \rightarrow K^3$ , so dass $\varphi \circ \psi$ ein Isomorphismus ist?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Gibt es eine Abbildung $\varphi : \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2$ , die nicht $\mathbb{F}_2$ -linear ist?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Gibt es eine Abbildung $\varphi : \mathbb{F}_3 \rightarrow \mathbb{F}_3$ , die nicht $\mathbb{F}_3$ -linear ist?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Gibt es eine injektive, lineare Abbildung $\varphi : K^{2 \times 3} \rightarrow K^{2 \times 2}$ ?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Gibt es eine injektive, lineare Abbildung $\varphi : K^{2 \times 3} \rightarrow K^{3 \times 2}$ ?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 7

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(1, -1, 0) = (1, 1)$ und $\varphi(0, 1, -1) = (0, 1)$ und $\varphi(1, 0, -1) = (1, 2)$ ?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(1, -1, 0) = (1, 2)$ und $\varphi(0, 1, -1) = (0, 1)$ und $\varphi(1, 0, -1) = (1, 1)$ ?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

## Aufgabe 3

Es seien  $K$  ein Körper und  $\varphi : V \rightarrow W$  und  $\psi : W \rightarrow V$  lineare Abbildungen zwischen den  $K$ -Vektorräumen  $V$  und  $W$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

Bild $(\psi \circ \varphi) = \text{Kern}(\varphi \circ \psi)$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Bild $(\psi \circ \varphi) \subseteq \text{Bild} \varphi$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Bild $(\psi \circ \varphi) \subseteq \text{Bild} \psi$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Bild $\psi \subseteq \text{Bild}(\psi \circ \varphi)$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Bild $\varphi \subseteq \text{Bild}(\psi \circ \varphi)$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Kern $(\psi \circ \varphi) = \text{Bild}(\varphi \circ \psi)$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Kern $(\psi \circ \varphi) \subseteq \text{Kern} \psi$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Kern $(\psi \circ \varphi) \subseteq \text{Kern} \varphi$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Kern $\psi \subseteq \text{Kern}(\psi \circ \varphi)$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Kern $\varphi \subseteq \text{Kern}(\psi \circ \varphi)$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

## Aufgabe 4

Es sei  $K$  ein endlicher Körper mit  $q$  Elementen. Bestimmen Sie jeweils die Anzahl der Elemente in den folgenden Mengen.

$K^2$ für $q = 13$ .	
$K^3$ für $q = 5$ .	
$M = \{\varphi \in \text{Hom}_K(K^{2 \times 2}, K) \mid \varphi(E_2) = 0\}$ und $q = 3$ .	
$M = \{\varphi \in \text{Hom}_K(K^{2 \times 2}, K) \mid \varphi(E_2) = 1\}$ und $q = 3$ .	
Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ , wobei $A \in K^{2 \times 3}$ vom Rang 2 ist und $q = 3$ .	

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 7

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ , wobei $A \in K^{3 \times 2}$ vom Rang 1 ist und $q = 2$ .	
Die Menge der 1-dimensionalen Untervektorräume von $K^3$ für $q = 5$ .	
Die Menge der 1-dimensionalen Untervektorräume von $K^4$ für $q = 3$ .	
Die Menge der $K$ -linearen Abbildungen von $K^2$ nach $K$ für $q = 13$ .	
Die Menge der $K$ -linearen Abbildungen von $K^2$ nach $K$ für $q = 17$ .	

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 8

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhoffer

<b>Aufgabe 1</b>	
Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $m$ Gleichungen und $n$ Unbekannten über dem Körper $K$ .	
Das Gleichungssystem ist genau dann unlösbar, wenn $\text{Rg } A = \text{Rg}([A, b]) - 1$ ist.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Das Gleichungssystem ist genau dann unlösbar, wenn $b \neq \underline{0}$ und $\text{Rg } A = \text{Rg}([A, b]) - 1$ ist.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $K = \mathbb{F}_2$ und $n \geq m$ , so hat $Ax = \underline{0}$ genau $2^{n-m}$ Lösungen.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $K = \mathbb{F}_2$ und $n \geq m$ , so hat $Ax = \underline{0}$ höchstens $2^{n-m}$ Lösungen.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $K = \mathbb{F}_2$ und $n \geq m$ , so hat $Ax = \underline{0}$ mindestens $2^{n-m}$ Lösungen.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $K = \mathbb{F}_2$ und $n = 7$ und hat $Ax = b$ genau 4 Lösungen, so muss $m \geq 5$ sein.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $K = \mathbb{F}_2$ und $n = 7$ und hat $Ax = b$ genau 4 Lösungen, so muss $m \geq 9$ sein.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $m = 4$ und $n = 5$ , so ist $Ax = b$ nicht eindeutig lösbar.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $m = 4$ und $n = 5$ , so ist $Ax = b$ nicht lösbar.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $m = 4$ und $n = 5$ , so ist $Ax = b$ stets lösbar.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $m = 7$ und $n = 5$ , so ist $Ax = b$ nicht lösbar.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $m = 7$ und $n = 5$ , so ist $Ax = b$ stets lösbar.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

<b>Aufgabe 2</b>	
Es sei	
$A = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{4 \times 5}.$	
Wie viele Lösungen hat das Gleichungssystem $Ax = b$ für ...	
$b = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} ?$	

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 8

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

$b = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} ?$	
$b = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{2} \\ \bar{0} \end{bmatrix} ?$	
$b = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} ?$	
$b = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \end{bmatrix} ?$	
$b = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} ?$	
$b = \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} ?$	

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 8

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

$b = \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{bmatrix} ?$	
$b = \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{2} \end{bmatrix} ?$	
$b = \begin{bmatrix} \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} ?$	
$b = \begin{bmatrix} \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{2} \\ \bar{2} \end{bmatrix} ?$	
$b = \begin{bmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{bmatrix} ?$	

## Aufgabe 3

Man berechne den Rang von  $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{Q}^{n \times n}$  mit  $n \geq 2$  und ...

$$a_{i,j} = 2 \cdot i \cdot j.$$

$$a_{i,j} = i \cdot j.$$

$$a_{i,j} = i + j.$$

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 8

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

$a_{i,j} = i + j + 1.$	
$a_{i,j} = i - j.$	
$a_{i,j} = i - j + 1.$	
$a_{i,j} = i^j.$	
$a_{i,j} = i^{j+1}.$	
$a_{i,j} = \begin{cases} j & \text{für } i < j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$	
$a_{i,j} = \begin{cases} i & \text{für } i \geq j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$	

## Aufgabe 4

Es sei  $V := \mathbb{Q}^{2 \times 3}$  der  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum der  $2 \times 3$ -Matrizen,  $W := \mathbb{Q}^{2 \times 2}$  der  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum der  $2 \times 2$ -Matrizen und  $\varphi : V \rightarrow W$  die folgende  $\mathbb{Q}$ -lineare Abbildung:

$$\varphi : V \longrightarrow W \quad , \quad M \longmapsto M \cdot A \quad , \quad \text{wobei } A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 2}.$$

Weiter seien die geordneten Basen

$$\mathcal{B} := \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

von  $V$  und

$$\mathcal{C} := \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \right)$$

von  $W$  gewählt. Berechnen Sie die Abbildungsmatrix  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$  von  $\varphi$  bezüglich dieser beiden Basen und geben Sie die verlangten Einträge an.

Der Eintrag in der 1. Zeile und der 1. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	
Der Eintrag in der 1. Zeile und der 3. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	
Der Eintrag in der 2. Zeile und der 2. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	
Der Eintrag in der 2. Zeile und der 5. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	
Der Eintrag in der 3. Zeile und der 2. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 8

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Der Eintrag in der 3. Zeile und der 5. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	
Der Eintrag in der 4. Zeile und der 2. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	
Der Eintrag in der 4. Zeile und der 4. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	
Der Eintrag in der 4. Zeile und der 5. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	
Der Eintrag in der 4. Zeile und der 6. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 9

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

<b>Aufgabe 1</b>	
Es sei $V = \langle \sin^2, \cos^2, \sin \cdot \cos \rangle \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (dabei ist natürlich $\sin^2 : x \mapsto (\sin x)^2$ , etc.) und $\varphi, \psi : V \rightarrow V$ seien definiert durch	
$\varphi(f)(x) = f'(x) \quad \text{bzw.} \quad \psi(f)(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	
für $f \in V$ und $x \in \mathbb{R}$ . Überprüfen Sie, dass tatsächlich $\varphi, \psi \in \text{End } V$ sind und dass $\mathcal{B} = (\sin^2, \cos^2, \sin \cdot \cos)$ eine Basis von $V$ ist. Berechnen Sie ...	
$(\psi \circ \varphi)(3 \sin^2 + \cos^2) =$ $\sin^2 + \cos^2 + \sin \cdot \cos$	(a) $-4 \sin \cdot \cos$ (b) $\sin^2 - \cos^2$ (c) <input type="checkbox"/> (a) <input type="checkbox"/> (b) <input type="checkbox"/> (c) <input type="checkbox"/> (d)
$(\varphi \circ \psi)(\sin \cdot \cos) =$ $\sin^2 + \cos^2 + \sin \cdot \cos$	(a) $-4 \sin \cdot \cos$ (b) $\sin^2 - \cos^2$ (c) <input type="checkbox"/> (a) <input type="checkbox"/> (b) <input type="checkbox"/> (c) <input type="checkbox"/> (d)
$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\psi \circ \varphi)(1, 1)$	
$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\psi \circ \varphi)(2, 2)$	
$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\psi)(1, 2)$	
$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\psi)(2, 3)$	
$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi \circ \psi)(2, 2)$	
$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi \circ \psi)(3, 3)$	
$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)(1, 3)$	
$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)(2, 3)$	

<b>Aufgabe 2</b>	
Es sei $K$ ein Körper mit $q$ Elementen und $A \in K^{n \times n}$ .	
$A \in \text{GL}_n(K)$ genau dann, wenn die Spalten von $A$ eine Basis von $K^{n \times 1}$ bilden.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$A \in \text{GL}_n(K)$ genau dann, wenn die Zeilen von $A$ eine Basis von $K^{1 \times n}$ bilden.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Es sei $n = 3$ und $q = 3$ . Dann ist die Anzahl der Basisfolgen $(v_1, \dots, v_n)$ von $K^{n \times 1}$ gleich ...	
Es sei $n = 3$ und $q = 5$ . Dann ist die Anzahl der Basisfolgen $(v_1, \dots, v_n)$ von $K^{n \times 1}$ gleich ...	

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 9

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Es sei $q = 2$ und $n = 5$ . Dann ist die Anzahl der $v_1 \in K^{n \times 1}$ , die als erster Vektor einer Basisfolge von $K^{n \times 1}$ gewählt werden können, gleich ...	
Es sei $q = 3$ und $n = 4$ . Dann ist die Anzahl der $v_1 \in K^{n \times 1}$ , die als erster Vektor einer Basisfolge von $K^{n \times 1}$ gewählt werden können, gleich ...	
Es sei $q = 5$ und $n = 3$ . Dann ist die Anzahl der $v_1 \in K^{n \times 1}$ , die als erster Vektor einer Basisfolge von $K^{n \times 1}$ gewählt werden können, gleich ...	
Für $q = 3$ ist die Anzahl der Elemente von $GL_3(K)$ gleich ...	
Für $q = 5$ ist die Anzahl der Elemente von $GL_3(K)$ gleich ...	
Ist $n = 2$ und $q = 3$ , so ist $ \{(v_1, v_2) \mid \{v_1, v_2\} \text{ ist eine Basis von } K^{2 \times 1}\} $ gleich ...	
Ist $n = 2$ und $q = 5$ , so ist $ \{(v_1, v_2) \mid \{v_1, v_2\} \text{ ist eine Basis von } K^{2 \times 1}\} $ gleich ...	

## Aufgabe 3

Berechnen Sie das Signum der folgenden Permutationen aus der symmetrischen Gruppe  $S_{12}$ . Geben Sie als Ergebnis entweder  $+1$  oder  $-1$  ein.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 11 & 6 & 10 & 3 & 12 & 4 & 5 & 2 & 9 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> $+1$ <input type="checkbox"/> $-1$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 10 & 6 & 11 & 1 & 9 & 8 & 5 & 4 & 12 & 7 & 3 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> $+1$ <input type="checkbox"/> $-1$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 11 & 8 & 5 & 12 & 3 & 6 & 1 & 7 & 9 & 10 & 4 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> $+1$ <input type="checkbox"/> $-1$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 2 & 10 & 3 & 12 & 1 & 5 & 8 & 7 & 9 & 6 & 11 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> $+1$ <input type="checkbox"/> $-1$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 6 & 11 & 10 & 8 & 9 & 1 & 7 & 12 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> $+1$ <input type="checkbox"/> $-1$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 2 & 4 & 10 & 7 & 1 & 3 & 8 & 12 & 9 & 11 & 6 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> $+1$ <input type="checkbox"/> $-1$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 4 & 10 & 11 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 12 & 6 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> $+1$ <input type="checkbox"/> $-1$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 11 & 9 & 1 & 10 & 8 & 2 & 12 & 7 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> $+1$ <input type="checkbox"/> $-1$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 7 & 10 & 2 & 3 & 11 & 12 & 8 & 6 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> $+1$ <input type="checkbox"/> $-1$

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 9

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 10 & 7 & 5 & 11 & 1 & 8 & 12 & 6 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> +1 <input type="checkbox"/> -1
--	---

<b>Aufgabe 4</b>	
<p>Es sei <math>\sigma</math> die folgende Permutation von 9 Punkten: <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 2 &amp; 3 &amp; 4 &amp; 5 &amp; 6 &amp; 7 &amp; 8 &amp; 9 \\ 3 &amp; 5 &amp; 9 &amp; 4 &amp; 1 &amp; 2 &amp; 6 &amp; 7 &amp; 8 \end{pmatrix}</math>. In den folgenden Fragen ist jeweils ein Produkt von Transpositionen angegeben, wobei an einer Stelle die Variable <math>i</math> anstelle einer der Ziffern von 1 bis 9 steht. Tragen Sie in das Antwortfeld die Ziffer ein, die man für <math>i</math> einsetzen muss, damit das Produkt gleich <math>\sigma</math> ist.</p>	
(1 2) (1 3) (2 5) (9 8) (8 7) (7 $i$ ) (3 6)	
(1 2) (1 3) (2 5) ( $i$ 8) (8 7) (7 6) (3 6)	
(1 2) (2 5) (3 9) ( $i$ 6) (7 8) (9 6) (1 6)	
(1 2) ( $i$ 7) (2 5) (1 6) (1 7) (3 9) (8 9)	
(1 3) (9 3) (9 8) (5 8) (8 2) (6 8) (7 $i$ )	
(4 5) (1 5) (9 8) (3 8) (6 2) (8 7) (2 4) (7 $i$ ) (1 4)	
(5 7) (2 7) (6 7) ( $i$ 8) (8 5) (1 3) (3 9)	
(9 8) (2 5) (3 8) (1 8) (8 7) (5 7) (6 $i$ )	
( $i$ 2) (3 7) (2 5) (1 6) (1 7) (3 9) (8 9)	
( $i$ 5) (1 5) (9 8) (3 8) (6 2) (8 7) (2 4) (7 4) (1 4)	

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 10

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

<b>Aufgabe 1</b>	
Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.	
$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_7^{2 \times 2}$ , geben Sie $x \in \{0, \dots, 6\}$ an mit $\bar{x} = \det A$ .	
Kreuzen Sie (1), (2) oder (3) an:  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & a & a \\ 2 & 3 & b & b \\ 2 & 3 & 4 & c \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{4 \times 4}$  (1) $(a-2) \cdot (b-3) \cdot (c-4)$ (2) $(a-4) \cdot (b-3) \cdot (c-2)$ (3) $(a-3) \cdot (b-2) \cdot (c-4)$	<input type="checkbox"/> (1) <input type="checkbox"/> (2) <input type="checkbox"/> (3)
Kreuzen Sie (1), (2) oder (3) an:  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & a & a & a \\ -1 & -2 & b & b \\ -1 & -2 & -3 & c \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{4 \times 4}$  (1) $(a+2) \cdot (b+1) \cdot (c+3)$ (2) $(a+1) \cdot (b+2) \cdot (c+3)$ (3) $(a+3) \cdot (b+2) \cdot (c+1)$	<input type="checkbox"/> (1) <input type="checkbox"/> (2) <input type="checkbox"/> (3)
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{4 \times 4}$	
$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$	
$\begin{bmatrix} 2 & 9 & 0 & 0 \\ \pi & i & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ i & \pi^2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$	

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 10

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{4 \times 4}$	
$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 2 & 7 \\ 4 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$	
$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ \pi & 3 & i & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ i & 0 & \pi^2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$	

## Aufgabe 2

Es sei  $K$  ein kommutativer Ring mit 1. Weiter sei  $A = [a_{i,j}] \in K^{n \times n}$  und  $s \in K$ . Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen allgemein richtig sind.

<p>Das Gleichungssystem über <math>\mathbb{Z}_6</math></p> $\begin{aligned} \bar{3}x_1 + \bar{3}x_2 + \bar{2}x_3 &= \bar{1} \\ \bar{3}x_1 + \bar{5}x_2 + \bar{5}x_3 &= \bar{2} \\ \bar{2}x_1 + \bar{1}x_2 + \bar{1}x_3 &= \bar{3} \end{aligned}$ <p>hat eine eindeutige Lösung <math>(x_1, x_2, x_3)</math> in <math>\mathbb{Z}_6^3</math>.</p>	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Es ist $\det(sA) = s \cdot \det A$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Es ist $\det(sA) = s^n \cdot \det A$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $K = \mathbb{Q}$ und $\det(A^3) = 1$ , so ist $\det A = 1$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $K = \mathbb{Q}$ und $\det(A^5) = 1$ , so ist $\det A = 1$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $K = \mathbb{Q}$ und $\det A = 2$ , so gibt es kein $B \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ mit $B^2 = A$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Sind alle $a_{i,j} \in \{0, 1, -1\}$ , so ist auch $\det A \in \{0, 1, -1\}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 10

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Sind alle $a_{i,j} \in \{0, 1\}$ , so ist auch $\det A \in \{0, 1\}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
--	---

## Aufgabe 3

Es seien $A, B, C, D \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ . Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind.	
Es gilt stets $\det \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = (\det B) \cdot (\det C)$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Es gilt stets $\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = (\det B) \cdot (\det C)$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Es gilt stets $\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = (\det A) \cdot (\det D) - (\det B) \cdot (\det C)$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Es gilt stets $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Genau dann gilt $\det \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = (\det B) \cdot (\det C)$ für alle $B, C \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ , wenn $n$ gerade ist.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Genau dann gilt $\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = (\det B) \cdot (\det C)$ für alle $A, B, C \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ , wenn $n$ gerade ist.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Genau dann gilt für alle $A, B, C, D \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ , dass $\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = (\det A) \cdot (\det D) - (\det B) \cdot (\det C)$ ist, wenn $n = 1$ ist.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

## Aufgabe 4

Es sei $K[X]$ der Polynomring über dem Körper $K$ in der Unbestimmten $X$ ; es seien $f, g \in K[X]$ .	
$\mathbb{Z}_2[X]$ hat genau 4 Elemente.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$\mathbb{Z}_2[X]$ hat unendliche viele Elemente.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Es gilt $\text{Grad}(f + g) = \text{Grad } f + \text{Grad } g$ , falls $f, g \neq 0$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Es gilt $\text{Grad}(f \cdot g) = \text{Grad } f + \text{Grad } g$ , falls $f, g \neq 0$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Es sei $f = X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}_5[X]$ . Wie viele $\alpha \in \mathbb{Z}_5$ gibt es mit $f(\alpha) = 0$ ?	
Es sei $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}_5[X]$ . Wie viele $\alpha \in \mathbb{Z}_5$ gibt es mit $f(\alpha) = 0$ ?	

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 10

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Es sei $f = X^4 - 9 \in \mathbb{R}[X]$ und $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ . Berechnen Sie $B = f(A)$ und geben Sie $b_{2,1}$ an.	
Es sei $f = X^4 - 9 \in \mathbb{R}[X]$ und $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ . Berechnen Sie $B = f(A)$ und geben Sie $b_{1,1}$ an.	
Es sei $f = X^4 - 9 \in \mathbb{R}[X]$ und $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ . Berechnen Sie $B = f(A)$ und geben Sie $b_{1,2}$ an.	
Es sei $f = X^4 - 9 \in \mathbb{R}[X]$ und $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ . Berechnen Sie $B = f(A)$ und geben Sie $b_{2,2}$ an.	
Ist $f \in K[X]$ invertierbar, so ist $\text{Grad } f = 0$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $f \in K[X]$ invertierbar, so ist $\text{Grad } f = 1$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 11

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

<b>Aufgabe 1</b>	
Es sei $K$ ein Körper und $K[X]$ der Polynomring über $K$ in der Unbestimmten $X$ .	
Die Anzahl der Polynome $f \in \mathbb{Z}_2[X]$ vom Grad 4 ist	
Die Anzahl der Polynome $f \in \mathbb{Z}_3[X]$ vom Grad 4 ist	
Hat $A \in \mathbb{Z}_2^{n \times n}$ das Minimalpolynom $X^2+X+1$ , so ist $A^6+A^5+A^3+A = 0 \in \mathbb{Z}_2^{n \times n}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Hat $A \in \mathbb{Z}_2^{n \times n}$ das Minimalpolynom $X^2+X+1$ , so ist $A^6+A^5+A^3+A = A \in \mathbb{Z}_2^{n \times n}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Hat $A \in \mathbb{Z}_2^{n \times n}$ das Minimalpolynom $X^2+X+1$ , so ist $A^6+A^5+A^3+A = E_n \in \mathbb{Z}_2^{n \times n}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $f \in K[X]$ mit $\text{Grad } f = 1$ , so hat $f$ in $K$ eine Nullstelle.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $f \in K[X]$ mit $\text{Grad } f \geq 1$ , so hat $f$ in $K$ eine Nullstelle.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $\text{Grad } f = n$ , so gibt es höchstens $n$ verschiedene Matrizen $A \in K^{2 \times 2}$ mit $f(A) = 0 \in K^{2 \times 2}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $\text{Grad } f = n$ , so hat $f$ genau $n$ verschiedene Nullstellen.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $\text{Grad } f = n$ , so hat $f$ höchstens $n$ verschiedene Nullstellen.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

<b>Aufgabe 2</b>	
Es sei $K$ ein Körper, $A \in K^{n \times n}$ und $\mu_A$ das Minimalpolynom von $A$ .	
Es gilt stets $\text{Grad } \mu_{A^2} \leq \text{Grad } \mu_A$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Es gilt stets $\text{Grad } \mu_{A^3} \leq \text{Grad } \mu_A$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Es sei $\alpha = 1 + \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ (betrachtet als $\mathbb{Q}$ -Algebra, $\mu_\alpha \in \mathbb{Q}[X]$ das Minimalpolynom von $\alpha$ über $\mathbb{Q}$ mit $\mu_\alpha = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ . Dann ist $a_0 =$	
Es sei $\alpha = 1 + \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ (betrachtet als $\mathbb{Q}$ -Algebra, $\mu_\alpha \in \mathbb{Q}[X]$ das Minimalpolynom von $\alpha$ über $\mathbb{Q}$ mit $\mu_\alpha = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ . Dann ist $a_1 =$	
Ist $A = 0$ , dann ist $\text{Grad } \mu_A = 0$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $\text{Grad } \mu_A = 1$ , so ist $A = E_n$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $\mu_A(0) \neq 0$ , so ist $A$ invertierbar.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $\mu_A(0) \neq 0$ , so ist $\det A \neq 0$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Wie viele $A \in \mathbb{F}_{17}^{4 \times 4}$ haben ein Minimalpolynom vom Grad 1?	

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 11

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Wie viele $A \in \mathbb{F}_{23}^{4 \times 4}$ haben ein Minimalpolynom vom Grad 1?	
---	--

## Aufgabe 3

Es sei  $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i + j \text{ gerade,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und  $\mu_A$  das Minimalpolynom.

Für $n = 100$ ist die Dimension des Eigenraums $E_A(t)$ zum größten Eigenwert $t$ gleich	
Für $n = 101$ ist die Dimension des Eigenraums $E_A(t)$ zum kleinsten Eigenwert $t$ gleich	
Für $n = 103$ ist die Dimension des Eigenraums $E_A(t)$ zum kleinsten Eigenwert $t$ gleich	
Für $n = 105$ ist die Dimension des Eigenraums $E_A(t)$ zum kleinsten Eigenwert $t$ gleich	
Für $n = 80$ ist die Dimension des Eigenraums $E_A(t)$ zum größten Eigenwert $t$ gleich	
Für $n = 90$ ist die Dimension des Eigenraums $E_A(t)$ zum größten Eigenwert $t$ gleich	
Für $n = 41$ ist der größte Eigenwert gleich	
Für $n = 43$ ist der größte Eigenwert gleich	
Für $n = 45$ ist der größte Eigenwert gleich	
Für $n = 50$ ist Grad $\mu_A$ gleich	
Für $n = 50$ ist der größte Eigenwert gleich	
Für $n = 52$ ist Grad $\mu_A$ gleich	
Für $n = 52$ ist der größte Eigenwert gleich	
Für $n = 54$ ist Grad $\mu_A$ gleich	
Für $n = 54$ ist der größte Eigenwert gleich	

## Aufgabe 4

Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum ( $1 \leq n < \infty$ ) und  $\varphi \in \text{End } V$ .

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 11

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

$\varphi$ hat mindestens einen Eigenwert.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Die Summe von zwei Eigenvektoren von $\varphi$ ist stets auch ein Eigenvektor von $\varphi$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Die Summe von zwei Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten ist kein Eigenvektor von $\varphi$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Es gibt $a \in K$ , das nicht Eigenwert irgendeines Endomorphismus von $V$ ist.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Es gibt einen Vektor $v \in V$ , der nicht Eigenvektor irgendeines Endomorphismus von $V$ ist.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist 0 einziger Eigenwert von $\varphi$ , so ist $\varphi = 0$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist 1 einziger Eigenwert von $\varphi$ , so ist $\varphi = \text{id}_V$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $\varphi$ nicht invertierbar, so hat $\varphi$ mindestens einen Eigenwert.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $\varphi$ nicht invertierbar, so hat $\varphi$ nur einen Eigenwert.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $\varphi^2 = \varphi$ und $\varphi \neq \text{id}_V$ , so hat $\varphi$ genau zwei Eigenwerte.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $\varphi^3 = \varphi$ und $\varphi \neq \text{id}_V$ , so hat $\varphi$ genau drei Eigenwerte.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 12

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

<b>Aufgabe 1</b>	
Es sei $K$ ein Körper, $\varphi \in \text{End } V$ für einen $n$ -dimensionalen $K$ -Vektorraum $V$ und $A \in K^{n \times n}$ mit $n \geq 1$ . Das charakteristische Polynom von $\varphi$ bzw. $A$ wird mit $\chi_\varphi$ bzw. $\chi_A$ bezeichnet, das Minimalpolynom mit $\mu_\varphi$ bzw. $\mu_A$ .	
Gibt es eine Basisfolge $\mathcal{B}$ von $V$ mit $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ , so ist $\chi_\varphi = \chi_A$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Hat $\chi_\varphi$ $n$ paarweise verschiedene Nullstellen in $K$ , so ist $\chi_\varphi = \mu_\varphi$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $\chi_\varphi = \chi_A$ , so gibt es eine Basisfolge $\mathcal{B}$ in $V$ mit $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $\chi_\varphi = \mu_\varphi$ , so hat $\varphi$ einen Eigenwert.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $\chi_\varphi(0) \neq 0$ , so ist $\varphi$ bijektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $\varphi$ bijektiv, so ist $\chi_\varphi(0) \neq 0$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist die Summe der Koeffizienten von $\chi_\varphi$ gleich 0, so ist 1 Eigenwert von $\varphi$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist die Summe der Koeffizienten von $\mu_\varphi$ gleich 0, so ist 1 Eigenwert von $\varphi$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Jedes normierte Polynom vom Grad $n$ über $K$ ist charakteristisches Polynom eines Endomorphismus von $V$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Jedes normierte Polynom vom Grad $n$ über $K$ ist Minimalpolynom eines Endomorphismus von $V$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

<b>Aufgabe 2</b>	
Es sei $K$ ein Körper und $K[X]$ der Polynomring in der Unbestimmten $X$ über $K$ . Sind die folgenden Aussagen über Diagonalisierbarkeit von Matrizen richtig?	
Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ( $n \geq 2$ ) ist genau dann diagonalisierbar, wenn ein $n$ -Tupel $(v_1, \dots, v_n)$ von Eigenvektoren von $A$ mit $v_i \in K^{n \times 1}$ existiert, das linear unabhängig ist.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ( $n \geq 2$ ) ist genau dann diagonalisierbar, wenn $K^{n \times 1}$ eine Basisfolge aus Eigenvektoren von $A$ hat.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn eine Diagonalmatrix $D \in K^{n \times n}$ und eine invertierbare Matrix $T \in K^{n \times n}$ existiert mit $TD = AT$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn eine Diagonalmatrix $D \in K^{n \times n}$ und eine Matrix $T \in K^{n \times n}$ existiert mit $TD = AT$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Hat ein normiertes Polynom $f \in K[X]$ , dessen Grad mindestens 2 ist, paarweise verschiedene Koeffizienten, dann ist seine Begleitmatrix diagonalisierbar.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 12

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

Jede Begleitmatrix eines normierten Polynoms $f \in K[X]$ vom Grad größer als 1 ist diagonalisierbar.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Jede Matrix $A \in K^{n \times n}$ , für die $0 \cdot A = A$ gilt, ist diagonalisierbar.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Jede quadratische Matrix, deren Einträge alle gleich sind, ist diagonalisierbar.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Jede quadratische Nullmatrix ist diagonalisierbar.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

## Aufgabe 3

Es sei $K$ ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ .	
$A$ und $A^T$ haben die gleichen Eigenräume.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
$A$ und $A^T$ haben die gleichen Eigenwerte.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3},$ so ist $\chi_A =$ (a) $X^3 - 2X^2 + X$ (b) $X^3 + 2X^2 + X$ (c) $X^3 - 2X^2 + 1$	<input type="checkbox"/> (a) <input type="checkbox"/> (b) <input type="checkbox"/> (c)
Ist $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3},$ so ist $\chi_A =$ (a) $X^3 + X$ (b) $X^3 - 2X + 1$ (c) $X^3 - X$	<input type="checkbox"/> (a) <input type="checkbox"/> (b) <input type="checkbox"/> (c)
Ist $K = \mathbb{C}$ , dann gilt: Wenn $\chi_A \neq X^n$ ist, so ist $A^m \neq 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $K = \mathbb{C}$ , dann gilt: Wenn $A^m = 0$ ist für ein $m \in \mathbb{N}$ , so ist $\chi_A = X^n$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $s$ Eigenwert von $A$ , so ist $\dim E_A(s) = n - \text{Rang}(A - s \cdot E_n)$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Ist $s$ Eigenwert von $A$ , so ist $\dim E_A(s) = \text{Rang}(A - s \cdot E_n)$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
Wie viele Matrizen $A \in \mathbb{Z}_2^{2 \times 2}$ sind ähnlich zu $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ?	
Wie viele Matrizen $A \in \mathbb{Z}_2^{2 \times 2}$ sind ähnlich zu $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ?	

## Aufgabe 4

# LA I WS 2003/04 - Übungsblatt 12

Autoren: Prof. Dr. H. Pahlings, Dr. F. Lübeck, M. Neunhöffer

<p>Es sei <math>K</math> ein Körper und <math>V</math> ein Vektorraum über <math>K</math>. Eine Bilinearform <math>\Phi : V \times V \rightarrow K</math> heißt <b>nicht ausgeartet</b>, falls es zu jedem <math>v \in V \setminus \{0\}</math> ein <math>w \in V</math> gibt mit <math>\Phi(v, w) \neq 0</math>.</p>	
<p>Es sei <math>V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}</math> und</p> $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ $(f, g) \mapsto \sum_{i=0}^5 (f(i) + g(i)) .$ <p>Ist <math>\Phi</math> eine symmetrische Bilinearform?</p>	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
<p>Es sei <math>V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}</math> und</p> $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ $(f, g) \mapsto \sum_{i=0}^5 f(i)g(i) .$ <p>Ist <math>\Phi</math> eine symmetrische Bilinearform?</p>	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
<p>Gibt es auf <math>V = K^2</math> eine nicht ausgeartete, symmetrische Bilinearform mit einem <math>0 \neq v \in V</math> und <math>\Phi(v, v) = 0</math>?</p>	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
<p>Gibt es auf <math>W = \mathbb{R}^2</math> eine nicht ausgeartete, symmetrische Bilinearform mit <math>\Phi(w, w) = 0</math> für alle <math>w \in W</math>?</p>	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
<p>Gibt es injektive Bilinearformen?</p>	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
<p>Gibt es injektive Sesquilinearformen?</p>	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
<p>Ist <math>\dim V = n</math>, dann bilden die Bilinearformen auf <math>V</math> einen Vektorraum der Dimension <math>2n</math>.</p>	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
<p>Ist <math>\dim V = n</math>, dann bilden die Bilinearformen auf <math>V</math> einen Vektorraum der Dimension <math>n^2</math>.</p>	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
<p>Ist <math>\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}</math> eine Bilinearform mit Gram-Matrix <math>M_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 &amp; 2 \\ 2 &amp; 1 \end{bmatrix}</math> bezüglich einer Basisfolge <math>\mathcal{B}</math>, so gibt es auch eine Basisfolge <math>\mathcal{B}'</math> mit <math>M_{\mathcal{B}'}(\Phi) = \begin{bmatrix} 2 &amp; 1 \\ 1 &amp; 2 \end{bmatrix}</math>.</p>	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein