DiffNum SS 2004 - Übungsblatt 1

Autoren: Prof. Dr. Henning Esser, Jörg Peters, Bernhard Pollul

Der Gaußalgorithmus mit Zeilenvertauschung ist durchführbar für alle diagonaldominanten Matrizen A.	○ wahr ○ falsch
Der Gaußalgorithmus mit Zeilenvertauschung ist durchführbar für alle Matrizen mit A s.p.d.	○ wahr ○ falsch
Der Gaußalgorithmus mit Zeilenvertauschung ist durchführbar für alle Matrizen mit $\det A \neq 0$.	○ wahr ○ falsch
Der Gaußalgorithmus ohne Zeilenvertauschung ist durchführbar für alle diagonaldominanten Matrizen A.	○ wahr ○ falsch
Der Gaußalgorithmus ohne Zeilenvertauschung ist durchführbar für alle Matrizen mit A s.p.d.	○ wahr ○ falsch
Der Gaußalgorithmus ohne Zeilenvertauschung ist durchführbar für alle Matrizen mit $\det A \neq 0$.	○ wahr ○ falsch
Die L-R-Zerlegung sei durchführbar. Dann gilt eine der folgenden Aussagen: (1) $\det L = 0$ (2) $\det L = 1$ (3) $\det L = \det A$ (4) $\det L = \det R$ (5) $\det L$ kann je nach Art von A alle reellen Zahlenwerte annehmen, i.A. $\det L \neq \det A$ und $\det L \neq \det R$.	○ 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5
Ist der Gaußalgorithmus ohne Zeilenvertauschung nicht durchführbar, so gilt $\det A = 0$.	○ wahr ○ falsch
Ist der Gaußalgorithmus ohne Zeilenvertauschung nicht durchführbar, so hat $Ax = b$ keine Lösung.	○ wahr ○ falsch
Sei $\det A \neq 0$. Dann gibt es genau eine Lösung x des Gleichungssystems $Ax = b$ und der Gaußalgorithmus ohne Zeilenvertauschung ist immer durchführbar.	○ wahr ○ falsch
Sei $\det A \neq 0$. Dann gibt es genau eine Lösung x des Gleichungssystems $Ax = b$. Es kann aber dennoch sein, daß der Gaußalgorithmus ohne Zeilenvertauschung nicht durchführbar ist.	○ wahr ○ falsch

DiffNum SS 2004 - Übungsblatt 2

Autoren: Prof. Dr. Henning Esser, Jörg Peters, Bernhard Pollul

<table>
<tr><td>

Die Matrix A sei eine beliebige nichtsinguläre 4×4-dimensionale reelle Matrix. Beim Gauß-Algorithmus mit Pivot-Strategie wurde das folgende Tupel von (wie in der Vorlesung definierten) p_k gebildet:
$p_1 = 3\ ,\quad p_2 = 3\ ,\quad p_3 = 4\ .$
Es wurde bereits die LR-Zerlegung $PA = LR$ berechnet. Wenn wir jetzt das System $Ax = c$ lösen wollen, dann lösen wir $Rx = z$ mit der Lösung z von $Lz = \tilde{c}$. Es gilt:
(1) $\tilde{c} = c$
(2) $\tilde{c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} c$
(3) $\tilde{c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} c$
(4) $\tilde{c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} c$
(5) $\tilde{c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} c$
(6) $\tilde{c} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} c$
(7) $\tilde{c} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} c$
(8) Ein solche Kombination von p_k ist nicht zulässig.

</td><td>

○ 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4
○ 5 ○ 6 ○ 7 ○ 8

</td></tr>
</table>

DiffNum SS 2004 - Übungsblatt 2

Autoren: Prof. Dr. Henning Esser, Jörg Peters, Bernhard Pollul

Die Matrix A sei eine beliebige nichtsinguläre 4×4-dimensionale reelle Matrix. Beim Gauß-Algorithmus mit Pivot-Strategie wurde das folgende Tupel von (wie in der Vorlesung definierten) p_k: $p_1 = 2\ ,\quad p_2 = 3\ ,\quad p_3 = 2\ .$ Es wurde bereits die LR-Zerlegung $PA = LR$ berechnet. Wenn wir jetzt das System $Ax = c$ lösen wollen, dann lösen wir $Rx = z$ mit der Lösung z von $Lz = \tilde{c}$. Es gilt: (1) $\tilde{c} = c$ (2) $\tilde{c} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} c$ (3) $\tilde{c} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} c$ (4) $\tilde{c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} c$ (5) $\tilde{c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c$ (6) $\tilde{c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} c$ (7) $\tilde{c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} c$ (8) Ein solche Kombination von p_k ist nicht zulässig.	○ 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5 ○ 6 ○ 7 ○ 8

DiffNum SS 2004 - Übungsblatt 2

Autoren: Prof. Dr. Henning Esser, Jörg Peters, Bernhard Pollul

Die Matrix A sei eine beliebige nichtsinguläre 4×4-dimensionale reelle Matrix. Beim Gauß-Algorithmus mit Pivot-Strategie wurde das folgende Tupel von (wie in der Vorlesung definierten) p_k: $p_1 = 2\ ,\quad p_2 = 3\ ,\quad p_3 = 4\ .$ Es wurde bereits die LR-Zerlegung $PA = LR$ berechnet. Wenn wir jetzt das System $Ax = c$ lösen wollen, dann lösen wir $Rx = z$ mit der Lösung z von $Lz = \tilde{c}$. Es gilt: (1) $\tilde{c} = c$ (2) $\tilde{c} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} c$ (3) $\tilde{c} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} c$ (4) $\tilde{c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} c$ (5) $\tilde{c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} c$ (6) $\tilde{c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} c$ (7) $\tilde{c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c$ (8) Ein solche Kombination von p_k ist nicht zulässig.	○ 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5 ○ 6 ○ 7 ○ 8

Die Matrix A sei eine beliebige nichtsinguläre $n \times n$-dimensionale reelle Matrix. Dann gilt eine der folgenden Aussagen: (1) $\mathrm{cond}(5 \cdot A) = \mathrm{cond}(A)$ (2) $\mathrm{cond}(5 \cdot A) = 5 \cdot \mathrm{cond}(A)$ (3) $\mathrm{cond}(5 \cdot A) = \sqrt{5} \cdot \mathrm{cond}(A)$ (4) $\mathrm{cond}(5 \cdot A) = 5n \cdot \mathrm{cond}(A)$ (5) $\mathrm{cond}(5 \cdot A) = \sqrt{5n} \cdot \mathrm{cond}(A)$ (6) $\mathrm{cond}(5 \cdot A) = 0.2 \cdot \mathrm{cond}(A)$ (7) $\mathrm{cond}(5 \cdot A) = 0.2 \cdot n \cdot \mathrm{cond}(A)$ (8) $\mathrm{cond}(5 \cdot A) = 25 \cdot n \cdot \mathrm{cond}(A)$ (9) $\mathrm{cond}(5 \cdot A)$ kann je nach Art von A alle reellen Zahlenwerte annehmen, i.A. gilt keine der Aussagen (1)-(8).	○ 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5 ○ 6 ○ 7 ○ 8 ○ 9
Die Matrix A sei eine beliebige nichtsinguläre $n \times n$-dimensionale reelle Matrix. Dann gilt eine der folgenden Aussagen: (1) $\mathrm{cond}(8 \cdot A) = 64 \cdot n \cdot \mathrm{cond}(A)$ (2) $\mathrm{cond}(8 \cdot A) = 0.125 \cdot n \cdot \mathrm{cond}(A)$ (3) $\mathrm{cond}(8 \cdot A) = 0.125 \cdot \mathrm{cond}(A)$ (4) $\mathrm{cond}(8 \cdot A) = \sqrt{8n} \cdot \mathrm{cond}(A)$ (5) $\mathrm{cond}(8 \cdot A) = 8n \cdot \mathrm{cond}(A)$ (6) $\mathrm{cond}(8 \cdot A) = \sqrt{8} \cdot \mathrm{cond}(A)$ (7) $\mathrm{cond}(8 \cdot A) = 8 \cdot \mathrm{cond}(A)$ (8) $\mathrm{cond}(8 \cdot A) = \mathrm{cond}(A)$ (9) $\mathrm{cond}(8 \cdot A)$ kann je nach Art von A alle reellen Zahlenwerte annehmen, i.A. gilt keine der Aussagen (1)-(8).	○ 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5 ○ 6 ○ 7 ○ 8 ○ 9
Die Matrix A sei eine beliebige nichtsinguläre $n \times n$-dimensionale reelle Matrix. Sei $B = 4 \cdot A$. Dann gilt eine der folgenden Aussagen: (1) $\mathrm{cond}(B) = 4n \cdot \mathrm{cond}(A)$ (2) $\mathrm{cond}(B) = 2 \cdot \mathrm{cond}(A)$ (3) $\mathrm{cond}(B) = 4 \cdot \mathrm{cond}(A)$ (4) $\mathrm{cond}(B) = \mathrm{cond}(A)$ (5) $\mathrm{cond}(B) = 2\sqrt{n} \cdot \mathrm{cond}(A)$ (6) $\mathrm{cond}(B) = 0.5 \cdot \mathrm{cond}(A)$ (7) $\mathrm{cond}(B) = 0.5 \cdot n \cdot \mathrm{cond}(A)$ (8) $\mathrm{cond}(B) = 16 \cdot n \cdot \mathrm{cond}(A)$ (9) $\mathrm{cond}(B)$ kann je nach Art von A alle reellen Zahlenwerte annehmen, i.A. gilt keine der Aussagen (1)-(8).	○ 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5 ○ 6 ○ 7 ○ 8 ○ 9

DiffNum SS 2004 - Übungsblatt 2

Autoren: Prof. Dr. Henning Esser, Jörg Peters, Bernhard Pollul

Die Matrix A sei eine beliebige nichtsinguläre $n \times n$-dimensionale reelle Matrix. Sei $B = 9 \cdot A$. Dann gilt eine der folgenden Aussagen: (1) $\mathrm{cond}(A) = \mathrm{cond}(B)$ (2) $\mathrm{cond}(A) = 0.verline1 \cdot \mathrm{cond}(B)$ (3) $\mathrm{cond}(A) = 0.verline3 \cdot \mathrm{cond}(B)$ (4) $\mathrm{cond}(A) = 0.verline1 \cdot n^{-1}\mathrm{cond}(B)$ (5) $\mathrm{cond}(A) = 0.verline3 \cdot n^{-1}\mathrm{cond}(B)$ (6) $\mathrm{cond}(A) = 9 \cdot \mathrm{cond}(B)$ (7) $\mathrm{cond}(A) = 9 \cdot n^{-1} \cdot \mathrm{cond}(B)$ (8) $\mathrm{cond}(A) = \frac{1}{81n}\mathrm{cond}(B)$ (9) Im Allgemeinen gilt keine der Aussagen (1)-(8).	○ 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5 ○ 6 ○ 7 ○ 8 ○ 9
Sei A eine nichtsinguläre $n \times n$-dimensionale reelle Matrix. Wir definieren mit $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_n)$ einen Zeilenpermutationsvektor. Hierbei sind alle $\tilde{p}_k$ ($k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$) paarweise verschieden, nehmen zusammen die Werte $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ an und $\tilde{p}_k = l$ bedeutet, daß die k-te Zeile der permutierten Matrix $\tilde{A}$ die l-te Zeile von A ist. Beispiele: Für $\tilde{p} = (1, 2, \ldots, n)$ werden keine Zeilen vertauscht und es ist $A = \tilde{A}$. Für $\tilde{p} = (1, 2, 4, 3, 5, 6, 7, \ldots, n)$ ist $\tilde{A}$ die Matrix, die man erhält, wenn die Zeilen 3 und 4 in A vertauscht werden. Sei nun $n = 4$. Finden Sie die aus der Vorlesung zum Gauß-Algorithmus gehörenden passenden p_k zu dem Permutationsvektor $\tilde{p} = (1, 4, 2, 3)$: (1) $p_1 = 1\ ,\quad p_2 = 3\ ,\quad p_3 = 3$ (2) $p_1 = 1\ ,\quad p_2 = 4\ ,\quad p_3 = 2$ (3) $p_1 = 1\ ,\quad p_2 = 4\ ,\quad p_3 = 4$ (4) $p_1 = 3\ ,\quad p_2 = 3\ ,\quad p_3 = 3$ (5) $p_1 = 0\ ,\quad p_2 = 2\ ,\quad p_3 = 0$ (6) $p_1 = 2\ ,\quad p_2 = 2\ ,\quad p_3 = 4$	○ 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5 ○ 6

Sei A eine nichtsinguläre $n \times n$-dimensionale reelle Matrix. Wir definieren mit $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_n)$ einen Zeilenpermutationsvektor. Hierbei sind alle $\tilde{p}_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) paarweise verschieden, nehmen zusammen die Werte $1, 2, \ldots, n$ an und $\tilde{p}_k = l$ bedeutet, daß die k-te Zeile der permutierten Matrix $\tilde{A}$ die l-te Zeile von A ist. Beispiele: Für $\tilde{p} = (1, 2, \ldots, n)$ werden keine Zeilen vertauscht und es ist $A = \tilde{A}$. Für $\tilde{p} = (1, 2, 4, 3, 5, 6, 7, \ldots, n)$ ist $\tilde{A}$ die Matrix, die man erhält, wenn die Zeilen 3 und 4 in A vertauscht werden. Sei nun $n = 4$. Finden Sie die aus der Vorlesung zum Gauß-Algorithmus gehörenden passenden p_k zu dem Permutationsvektor $\tilde{p} = (1, 4, 3, 2)$: (1) $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$ (2) $p_1 = 1$, $p_2 = 4$, $p_3 = 4$ (3) $p_1 = 4$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$ (4) $p_1 = 1$, $p_2 = 4$, $p_3 = 3$ (5) $p_1 = 0$, $p_2 = 2$, $p_3 = 0$ (6) $p_1 = 2$, $p_2 = 2$, $p_3 = 4$	○ 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5 ○ 6
Sei A eine nichtsinguläre $n \times n$-dimensionale reelle Matrix. Wir definieren mit $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_n)$ einen Zeilenpermutationsvektor. Hierbei sind alle $\tilde{p}_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) paarweise verschieden, nehmen zusammen die Werte $1, 2, \ldots, n$ an und $\tilde{p}_k = l$ bedeutet, daß die k-te Zeile der permutierten Matrix $\tilde{A}$ die l-te Zeile von A ist. Beispiele: Für $\tilde{p} = (1, 2, \ldots, n)$ werden keine Zeilen vertauscht und es ist $A = \tilde{A}$. Für $\tilde{p} = (1, 2, 4, 3, 5, 6, 7, \ldots, n)$ ist $\tilde{A}$ die Matrix, die man erhält, wenn die Zeilen 3 und 4 in A vertauscht werden. Sei nun $n = 4$. Finden Sie die aus der Vorlesung zum Gauß-Algorithmus gehörenden passenden p_k zu dem Permutationsvektor $\tilde{p} = (2, 1, 4, 3)$: (1) $p_1 = 2$, $p_2 = 2$, $p_3 = 4$ (2) $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, $p_3 = 4$ (3) $p_1 = 1$, $p_2 = 4$, $p_3 = 4$ (4) $p_1 = 1$, $p_2 = 4$, $p_3 = 3$ (5) $p_1 = 0$, $p_2 = 2$, $p_3 = 0$ (6) $p_1 = 3$, $p_2 = 2$, $p_3 = 4$	○ 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5 ○ 6

DiffNum SS 2004 - Übungsblatt 2

Autoren: Prof. Dr. Henning Esser, Jörg Peters, Bernhard Pollul

Sei A eine nichtsinguläre $n \times n$-dimensionale reelle Matrix. Wir definieren mit $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_n)$ einen Zeilenpermutationsvektor. Hierbei sind alle $\tilde{p}_k$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ paarweise verschieden, nehmen zusammen die Werte $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ an und $\tilde{p}_k = l$ bedeutet, daß die k-te Zeile der permutierten Matrix $\tilde{A}$ die l-te Zeile von A ist. Beispiele: Für $\tilde{p} = (1, 2, \ldots, n)$ werden keine Zeilen vertauscht und es ist $A = \tilde{A}$. Für $\tilde{p} = (1, 2, 4, 3, 5, 6, 7, \ldots, n)$ ist $\tilde{A}$ die Matrix, die man erhält, wenn die Zeilen 3 und 4 in A vertauscht werden. Sei nun $n = 4$. Finden Sie die aus der Vorlesung zum Gauß-Algorithmus gehörenden passenden p_k zu dem Permutationsvektor $\tilde{p} = (3, 2, 4, 1)$: (1) $p_1 = 3\ ,\quad p_2 = 2\ ,\quad p_3 = 3$ (2) $p_1 = 3\ ,\quad p_2 = 2\ ,\quad p_3 = 1$ (3) $p_1 = 1\ ,\quad p_2 = 4\ ,\quad p_3 = 2$ (4) $p_1 = 1\ ,\quad p_2 = 4\ ,\quad p_3 = 3$ (5) $p_1 = 0\ ,\quad p_2 = 2\ ,\quad p_3 = 0$ (6) $p_1 = 3\ ,\quad p_2 = 2\ ,\quad p_3 = 4$	○ 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5 ○ 6

DiffNum SS 2004 - Übungsblatt 3

Autoren: Prof. Dr. Henning Esser, Jörg Peters, Bernhard Pollul

Die Funktion $f : x \to f(x)$, die eine hohe Konditionszahl $\kappa(x)$ hat, soll bei x_0 ausgewertet werden. Die Daten in x sind jedoch gestört. Kreuzen Sie alle richtigen Aussagen an: (1) Die relativen Eingabefehler in x werden entsprechend der Konditionszahl verstärkt und erzeugen einen hohen Fehler im Resultat. (2) Eingabefehler werden durch den Faktor $\kappa(x)^{-1}$ gedämpft, daher ist mit guten Ergebnissen zu rechnen. Man sollte jedoch darauf achten, einen stabilen Algorithmus zu verwenden, um z.B. Auslöschung zu vermeiden. (3) Das Ergebnis läss t sich nicht weiter verbessern: Findet man eine Funktion $g(x)$ mit $g(x_0) = f(x_0)$, so ist die Fehlerverstärkung genauso groß, weil die Kondition nur vom Problem abhängt. (4) Ein solcher Algorithmus ist nicht stabil.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4
Die Funktion $f : x \to f(x)$, die eine sehr kleine Konditionszahl $\kappa(x)$ hat, soll bei x_0 ausgewertet werden. Die Daten in x sind jedoch gestört. Kreuzen Sie alle richtigen Aussagen an: (1) Die relativen Eingabefehler in x werden entsprechend der Konditionszahl verstärkt und erzeugen einen sehr großen Fehler im Resultat. (2) Eingabefehler werden nur leicht verstärkt oder sogar gedämpft, daher ist mit guten Ergebnissen zu rechnen. Man sollte jedoch darauf achten, einen stabilen Algorithmus zu verwenden, um z.B. Auslöschung zu vermeiden. (3) Das Ergebnis läss t sich nicht weiter verbessern: Findet man eine Funktion $g(x)$ mit $g(x_0) = f(x_0)$, so ist die Fehlerverstärkung genauso groß, weil die Kondition nur vom Problem abhängt. (4) Ein solcher Algorithmus ist immer stabil.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4
In dieser Aufgabe geht es um den Fixpunktsatz von Banach. Gesucht ist ein Fixpunkt x^* einer Funktion $F(x)$. Kreuzen Sie alle richtigen Aussagen an: (1) Angenommen es existiere ein Fixpunkt x^* in einem Intervall D. Ist dort die Selbstabbildung verletzt, so gibt es einen Punkt $x_0 \in D$, so daß $F(x_0) \notin D$. (2) Wenn die Selbstabbildung für D nicht gezeigt werden kann, kann man sicher sein, daß in D keine Fixpunkte von F existieren. (3) Wenn die Kontraktionsbedingung für D nicht gezeigt werden kann, kann es sein, daß trotzdem ein Fixpunkt existiert. (4) Es kann sein, daß die Voraussetzung der Kontraktivität für jedes noch so kleine $\bar{B}\|_r(x^*)$ nicht gelten, und es dennoch einen Fixpunkt in $\bar{B}\|_r(x^*)$ gibt.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

DiffNum SS 2004 - Übungsblatt 3

Autoren: Prof. Dr. Henning Esser, Jörg Peters, Bernhard Pollul

In dieser Aufgabe geht es um den Fixpunktsatz von Banach. Gesucht ist ein Fixpunkt x^* einer Funktion $F(x)$. Kreuzen Sie alle richtigen Aussagen an: (1) Angenommen, es existiere ein Fixpunkt x^* in einem abgeschlossenen Intervall D. Ist dort die Kontraktionsbedingung verletzt, so gibt es einen Punkt $x^* \neq x_0 \in D$, dessen Abstand zum Fixpunkt sich vergößert, d.h. $\|x^* - F(x_0)\| \geq \|x^* - x_0\|$. (2) Wenn die Selbstabbildung für D nicht gezeigt werden kann, kann es sein, daß trotzdem ein Fixpunkt existiert. (3) Wenn die Kontraktionsbedingung für D nicht gezeigt werden kann, kann man sicher sein, daß in D keine Fixpunkte von F existieren. (4) Sind alle Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach für D erfüllt, so findet man alle Fixpunkte in D mit der Fixpunktiteration.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4
In dieser Aufgabe geht es um den Fixpunktsatz von Banach. Gesucht ist ein Fixpunkt x^* einer Funktion $F(x)$. Kreuzen Sie alle richtigen Aussagen an: (1) Man kann mit jedem beliebigen Startwert im Definitionsbereich den Fixpunkt ermitteln, falls die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach erfüllt sind. (2) Wenn die Selbstabbildung und die Kontraktionsbedingung für D nicht gezeigt werden können, kann man sicher sein, daß in D keine Fixpunkte von F existieren. (3) Wenn ein Fixpunkt in D existiert, kann man immer ein $D_1 \subset D$ finden, so daß die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach in D_1 erfüllt sind. (4) Wenn das Fixpunktverfahren konvergiert, dann sind auch die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach in D erfüllt.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4
Kreuzen Sie alle richtigen Aussagen an: (1) Die Konditionszahl einer Funktion gibt an, wie stark sich Eingabefehler verstärken, unter der Annahme, man verwende exakte Arithmetik. (2) Die Konditionszahl einer Funktion gibt an, wie stark sich Eingabefehler aufgrund von Instabilitäten im verwendeten Algorithmus verstärken. (3) Kondition ist der unvermeidbare Fehler einer Funktion. (4) Ein stabiler Algorithmus impliziert eine geringe Kondition.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

DiffNum SS 2004 - Übungsblatt 4

Autoren: Prof. Dr. Henning Esser, Jörg Peters, Bernhard Pollul

Die Tabelle enthält die Iterierten von Verfahren zur Nullstellenbestimmung. Welche Verfahren haben wahrscheinlich genau Ordnung 2? Beachten Sie, daß lineare Konvergenz Ordnung 1 bedeuted und quadratische Konvergenz Ordnung 2.

☐ A ☐ B ☐ C

Verfahren A	Verfahren B	Verfahren C
1.5	1.5	1.5
1.7500000000000000000	1.6794494717703367761	1.7319152704600822935
1.7321428571428571429	1.7202363549339373828	1.7320508065772391380
1.7320508100147275405	1.7294026901692608711	1.7320508075688772935
1.7320508075688772953	1.7314575259612854372	1.7320508075688772935

Die Tabelle enthält die Iterierten von Verfahren zur Nullstellenbestimmung. Welche Verfahren haben wahrscheinlich genau Ordnung 2? Beachten Sie, daß lineare Konvergenz Ordnung 1 bedeuted und quadratische Konvergenz Ordnung 2.

☐ A ☐ B ☐ C

Verfahren A	Verfahren B	Verfahren C
1.4	1.4	1.4
1.5959115447074779790	1.6177526499707038482	1.6444444444444444444
1.6158073525639947201	1.6180339879573989478	1.6183387270765911543
1.6178100571450967624	1.6180339887498948482	1.6180340302692688577
1.6180114698932887122	1.6180339887498948482	1.6180339887498956191

Eine hinreichend glatte Funktion läßt sich beliebig genau durch Polynome über jedem beliebigen abgeschlossenen und beschränkten Intervall approximeren.	◦ wahr ◦ falsch
Jedes Polynom vom Grad m ist durch m (verschiedene) Stützstellen eindeutig darstellbar.	◦ wahr ◦ falsch

DiffNum SS 2004 - Übungsblatt 5

Autoren: Prof. Dr. Henning Esser, Jörg Peters, Bernhard Pollul

Bei der Polynominterpolation sind folgende Aussagen richtig: (1) Bei nicht-äquidistanten (aber paarweise verschiedenen) Stützstellen ist das Newton-Schema immer durchführbar. (2) Bei paarweise verschiedenen Stützstellen ist die Interpolationsaufgabe immer eindeutig lösbar. (3) Bei der Bestimmung des Interpolationspolynoms durch ein Gleichungssystem kommt es nicht auf die Reihenfolge der Stützstellen an. (4) In der Newton-Darstellung haben die Interpolationspolynome meist einen höheren Grad als in der Normalenform.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4
Bei der Polynominterpolation sind folgende Aussagen richtig: (1) Bei paarweise verschiedenen Stützstellen ist die Interpolationsaufgabe nur dann immer eindeutig lösbar, wenn auch die vorgegeben Funktionswerte an den Stützstellen alle paarweise verschieden sind. (2) Bei nicht-äquidistanten (aber paarweise verschiedenen) Stützstellen ist das Newton-Schema nicht immer durchführbar. (3) Beim Newton-Schema zur Bestimmung des Interpolationspolynoms kommt es nicht auf die Reihenfolge der Stützstellen an. (4) In der Lagrange-Darstellung haben die Interpolationspolynome meist einen höheren Grad als in der Normalenform.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4
Bei der Polynominterpolation sind folgende Aussagen richtig: (1) Nur eine äquidistante Wahl der Stützstellen garantiert den maximalen Grad des Interpolationspolynoms. (2) Beim Newton-Schema zur Bestimmung des Interpolationspolynoms kommt es auf die Reihenfolge der Stützstellen an. (3) In der Lagrange-Darstellung haben die Interpolationspolynome meist einen niedrigeren Grad als in der Normalenform. (4) Bei paarweise verschiedenen Stützstellen ist die Interpolationsaufgabe immer eindeutig lösbar.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4
Die Lagrangeschen Grundpolynome haben folgende Eigenschaften: (1) Die Extremwerte der Lagrangeschen Grundpolynome liegen immer genau an den Stützstellen. (2) Der Grad der Lagrangeschen Grundpolynome ist immer gleich der Anzahl der Stützstellen. (3) Die Lagrangeschen Grundpolynome haben an einer Stützstelle genau den Wert 1 und an allen anderen den Wert 0. (4) Die Lagrangeschen Grundpolynome sind immer stetige Funktionen.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

DiffNum SS 2004 - Übungsblatt 5

Autoren: Prof. Dr. Henning Esser, Jörg Peters, Bernhard Pollul

Die Lagrangeschen Grundpolynome haben folgende Eigenschaften: (1) Die Lagrangeschen Grundpolynome sind unstetige, aus Geradenstücken zusammengesetzte, Funktionen. (2) Die Extremwerte der Lagrangeschen Grundpolynome liegen immer genau an den Stützstellen. (3) Wenn s Stützstellen vorliegen, so ist er Grad der Lagrangeschen Grundpolynome genau $s-1$. (4) Die Lagrangeschen Grundpolynome haben an einer Stützstelle genau den Wert 1 und an allen anderen den Wert -1.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4
Die Lagrangeschen Grundpolynome haben folgende Eigenschaften: (1) Wenn $s+1$ Stützstellen vorliegen, so ist er Grad der Lagrangeschen Grundpolynome genau s. (2) Die Lagrangeschen Grundpolynome sind unendlich oft differenzierbar. (3) Ein Extremwert eines Lagrangeschen Grundpolynome liegt immer genau an der zugehörigen Stützstelle. (4) Die Lagrangeschen Grundpolynome haben an einer Stützstelle genau den Wert 0 und an allen anderen den Wert 1.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4
Es liege das Problem der Lösung eines Ausgleichsproblems mittels Normalengleichungen $A^tAx = A^tb$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, vor. (1) Dieses Problem ist meist schlecht konditioniert. (2) Dieses Problem ist meist gut konditioniert. (3) Dieses Problem ist stets eindeutig lösbar, falls Rang$(A) = m$.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3
Es liege das Problem der Lösung eines Ausgleichsproblems mittels Normalengleichungen $A^tAx = A^tb$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, vor. (1) Dieses Problem ist meist schlecht konditioniert. (2) Dieses Problem ist meist gut konditioniert. (3) Dieses Problem ist stets eindeutig lösbar, falls Rang$(A) = n$.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3
Es liege das Problem der Lösung eines Ausgleichsproblems mittels Normalengleichungen $A^tAx = A^tb$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, vor. (1) Dieses Problem ist stets eindeutig lösbar, falls Rang$(A) = m - n$. (2) Dieses Problem ist meist schlecht konditioniert. (3) Dieses Problem ist meist gut konditioniert.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3
Es liege das Problem der Lösung eines Ausgleichsproblems mittels Normalengleichungen $A^tAx = A^tb$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, vor. (1) Dieses Problem ist stets eindeutig lösbar, falls Rang$(A) = n$. (2) Dieses Problem ist meist gut konditioniert. (3) Dieses Problem ist meist schlecht konditioniert.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3

DiffNum SS 2004 - Übungsblatt 6

Autoren: Prof. Dr. Henning Esser, Jörg Peters, Bernhard Pollul

Das implizite Euler-Verfahren ist konsistent mit Ordnung 1 (f stetig diffbar)	○ wahr ○ falsch
Ist $y(t)$ Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = f(t, y(t)), y(t_0) = y_0, t, t_0 \in I$, I reelles Intervall, mit einer stetigen Funktion f, dann konvergiert das Euler-Cauchy-Verfahren gegen diese Lösung für $h \to 0$.	○ wahr ○ falsch
Ist $y(x)$ Lösung des Anfangswertproblems $y'(x) = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0, x, x_0 \in I$, I reelles Intervall, mit einer stetigen Funktion f, dann konvergiert das verbesserte Euler-Cauchy-Verfahren gegen diese Lösung für $h \to 0$.	○ wahr ○ falsch
Verschwindet der lokale Abbruchfehler bei einem Runge-Kutta-Verfahren für $h \to 0$ so nennt man das Verfahren konsistent.	○ wahr ○ falsch